Física Teórica 2 - Guía 6: Oscilador armónico, aplicaciones: estados de Landau, y campo electrómagnético cuantizado

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

20 de mayo de 2021

1. Breve resumen: Oscilador armómico

El Hamiltoniano de un oscilador armónico 1D de masa m y frecuencia ω está dado por:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

la solución en mecánica clásica de este problema es:

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) \qquad p = m\omega A \sin(\omega t + \phi_0)$$

donde las constantes se determinan por las condiciones iniciales $x(0)$ y $p(0)$. La curva en el espacio de fases es una elipse con energía constante $E = m\omega^2 A^2/2$.

En Mecánica Cuántica, el método algebraico para encontrar los autoestados del Hamiltoniano consiste en identificar los operadores a y $a^\dagger$, adimensionales dados por:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}(x + i\frac{p}{m\omega})$$
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}(x - i\frac{p}{m\omega})$$

con $\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ una distancia característica en este problema. No es dificil probar que $[a, a^\dagger] = 1$, usando la conmutación canónica $[x, p] = i\hbar$.

Se puede despejar x y p, y obtener que

$$H = \hbar\omega(N + \frac{1}{2}) \qquad N = aa^\dagger \tag{1}$$

Usando las relaciones de conmutación $[N, a] = -a$ y $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ se obtiene que el espectro del operador de número N son los enteros $n \geq 0$, y sus autoestados $|n\rangle$ satisfacen las relaciones:

$$N|n\rangle = n|n\rangle \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n\rangle \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

lo que da lugar a llamar a a operador de bajada (destrucción) y a $a^\dagger$ operador de subida (creación). El proceso de bajar el valor de n siempre termina en $n = 0$, pues $a\,|0\rangle = 0$. Del mismo modo se puede subir desde $n = 0$ a un n general:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n}\,|0\rangle$$

Los estados $|n\rangle$ son autoestados de la energía con autovalor $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Las propiedades de los estados $|n\rangle$ no proveen una ajustada descripción del movimiento clásico. Los valores medios de la posición y del momento en estos estados es nula y no depende del tiempo. La incerteza mínima para la posición y el momento es sólo correcta para el fundamental $|0\rangle$, para estados excitados dicha incerteza es creciente. Sin embargo se pueden definir estados que resuelven estas debilidades. Los nuevos estados son los llamados estados coherentes $|\alpha\rangle$, cuya propiedad fundamental es que son autoestados del operador de bajada a, de modo que $a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$ (a no es operador hermítico). Es posible expresar el estado normalizado $|\alpha\rangle$ en la base de número de ocupación $\{|n\rangle\}$:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

Veremos dos aplicaciones del oscilador armónico: i) el problema de los niveles de Landau, y ii) un problema de campo electromagnético cuantizado. La introducción del último problema está en el apunte de las teóricas del curso.

2. Problema 10

Niveles de Landau: electrón libre en un campo magnético. El Hamiltoniano de un electrón en presencia de un campo magnético externo estático con potencial vector $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x, y, z)\right)^2.$$

Definimos los operadores Π_i, $i = x, y, z$ como

$$\Pi_i = p_i - \frac{eA_i}{c}.$$

(a) Escriba el Hamiltoniano en función de los operadores Π_i.

(b) Calcule $[x_i, \Pi_j]$ (donde x_i, $i = 1, 2, 3$ son los operadores de posición x, y, z). ¿Qué relaciones de conmutación se obtienen? Interprete.

(c) Calcule $[\Pi_i, \Pi_j]$. Interprete.

Considere el caso en que el campo magnético es uniforme en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, es decir $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. En tal caso, en un gauge apropiado se puede tomar como potencial vector $\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x(x, y)\hat{\boldsymbol{x}} + A_y(x, y)\hat{\boldsymbol{y}}$, con $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$. En este gauge tenemos que $\Pi_z = p_z$.

(d) Muestre que entonces $[p_z, H] = 0$. ¿Qué consecuencias tiene esto? ¿Cuáles son los autovalores del operador p_z?

(e) ¿Cuánto vale el conmutador $[\Pi_x, \Pi_y]$ en este caso? Muestre que redefiniendo los operadores Π_x y Π_y multiplicándolos por una constante apropiada, se obtiene la relación de conmutación canónica.

(f) Concluya entonces que los autovalores del Hamiltoniano del electrón en el campo magnético uniforme son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{R}$. Interprete.

(a) El Hamiltoniano es inmediato:

$$H = \frac{1}{2m}\sum_i \Pi_i^2 \qquad \Pi_i = p_i - \frac{e}{c}A_i \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

(b) Cálculo de $[x_i, \Pi_j]$,

$$[x_i, \Pi_j] = [x_i, p_j - \frac{e}{c}A_j(x, y, z)] = [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}$$

se obtienen las relaciones de conmutación canónicas.

(b) Cálculo de $[\Pi_i, \Pi_j]$,

$$\begin{aligned}
[\Pi_i, \Pi_j] &= [p_i - \frac{e}{c}A_i(x, y, z), p_j - \frac{e}{c}A_j(x, y, z)] \\
&= -\frac{e}{c}([p_i, A_j(x, y, z)] + [p_j, A_i(x, y, z)]) \\
&= -\frac{e}{c}(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}[p_i, x_i] + \frac{\partial A_i}{\partial x_j}[x_j, p_j])
\end{aligned}$$

por lo que

$$[\Pi_i, \Pi_j] = i\frac{e\hbar}{c}(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = i\frac{e\hbar}{c}\epsilon_{ijk}B_k$$

si $i = j$ da cero, el caso no nulo es si $i \neq j \neq k$, donde:

$$B_k = \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

con $\{i, j, k\}$ una permutación cíclica de $\{1, 2, 3\}$. Siempre podemos elegir una dirección de $\boldsymbol{B}$, por ejemplo la dirección z, por lo que en las dos direcciones ortogonales a esta, los $[\Pi_x, \Pi_y] = i\frac{e\hbar}{c}B$. Es decir que, a menos de una constante, son canónicamente conjugadas. Redefiniendo y usando que $e = -|e|$

$$\tilde{\Pi}_x = \frac{\Pi_x}{\sqrt{\frac{|e|B}{c}}} \qquad \tilde{\Pi}_y = \frac{\Pi_y}{\sqrt{\frac{|e|B}{c}}} \qquad \Longrightarrow \qquad [\tilde{\Pi}_y, \tilde{\Pi}_x] = i\hbar$$

por lo que $\left\{\tilde{\Pi}_x, \tilde{\Pi}_y\right\}$ son canónicamente conjugadas. El Hamiltoniano del sistema se escribe

$$H = \underbrace{\frac{p_z^2}{2m}}_{H_{z,libre}} + \underbrace{\frac{|e|B}{2mc}(\tilde{\Pi}_y^2 + \tilde{\Pi}_x^2)}_{H_{oscilador}}$$

donde la masa del oscilador es: $\tilde{m} = \frac{mc}{eB}$ y $\tilde{m}\omega^2 = \frac{1}{\tilde{m}}$ de donde:

$$\omega = \frac{|e|B}{mc}$$

los autovalores son:

$$E_{k,n} = \frac{\hbar^2}{2m} + \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$$

Hasta ahora la cuenta es independiente de la medida (gauge). Para proseguir debemos elegir un gauge particular, en este caso se sugiere el gauge simétrico, donde $\boldsymbol{A} = \frac{B}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$. Dada la elección del par momento - coordenada realizada, en el Hamiltoniano no aparece un grado de libertad. Por ello deberemos plantear un par de variables conjugadas que satisfaga relaciones de conmutación canónica con $\left\{\tilde{\Pi}_x, \tilde{\Pi}_y\right\}$. Este problema es un ejercicio de Mecánica Clásica (transformaciones canónicas), y se elige el par: $X = p_x + \frac{eA_x}{c}$,$Y = p_y + \frac{eA_x}{c}$

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= [p_x + \frac{eA_x}{c}, p_y + \frac{eA_y}{c}] \\
&= \frac{eB}{2c}([-y, p_y] + [p_x, x]) \\
&= \frac{|e|B}{c} i\hbar
\end{aligned}$$

de donde podemos definir dos variables canónicamente conjugadas:

$$\tilde{X} = \frac{X}{\sqrt{\frac{|e|B}{c}}} \qquad \tilde{Y} = \frac{Y}{\sqrt{\frac{|e|B}{c}}} \qquad [\tilde{X}, \tilde{Y}] = i\hbar$$

Ahora nos falta ver los conmutadores con las otras variables, en particular con $\tilde{\Pi}_x$ y $\tilde{\Pi}_y$. No es dificil verificar que los conmutadores son nulos por lo cual estas nuevas magnitudes conmutan con H. Esto es importante para poder etiquetar los estados de H en forma completa (en Mecánica Clásica equivale a reintroducir el grado de libertad ausente en H).

Definamos ahora nuevos operadores de subida y bajada, tales que $[b, b^\dagger] = 1$:

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} + i\tilde{Y}) \qquad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{X} - i\tilde{Y}) \qquad [[b, b^\dagger] = 1$$

Estos operadores nos permiten definir una base de autoestados del Hamiltoniano. Sea el estado $|k_z, 00\rangle$ que es anulado por a y por b. A partir de allí podemos generar otros autoestados de H (notar que H conmuta con b y b^dagger):

$$H\,|k_z, n, m\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\,|k_z, n, m\rangle \qquad |k_z, n, m\rangle = a^{\dagger n} b^{\dagger m}\,|k_z, 00\rangle$$

Donde se evidencia la gran degeneración de los niveles de Landau, cuyas energías sólo dependen de n y no de m. Para terminar daremos la expresión de la función de onda del estado $k_z, 0, 0$,

$$\langle x, y, z|\, kz, 00 \sim e^{-(x^2+y^2)/(4l_B^2)} \qquad l_b \sqrt{\tfrac{\hbar}{|e|B}}$$

donde l_B es denominada longitud magnética.

Hemos terminado el problema de una manera no estrictamente secuencial, el alumno puede seguir la secuencia sugerida en el enunciado original.

3. Problema 12

Estados de n fotones y estados coherentes del campo EM. Considere un único modo del campo electromagnético.

(a) Sea $|n\rangle$ el estado con n fotones en este modo. Calcule el valor medio en función del tiempo $\langle n|E|n\rangle\,(t)$ del campo eléctrico en este estado. ¿Obtiene lo que hubiese esperado? Calcule además la varianza de E en función del tiempo. Interprete.

(b) Sea $|\alpha\rangle$ un estado coherente de este modo. Calcule el valor medio en función del tiempo $\langle\alpha|E|\alpha\rangle\,(t)$ del campo en este estado, escribiendo explícitamente $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$. Interprete el resultado. ¿Qué es un estado coherente del campo? Calcule además la varianza de E en función del tiempo. Interprete. Finalmente, calcule la probabilidad de obtener n fotones en un estado coherente, ¿qué distribución obtiene?

El potencial vector cuantizado de un campo monomodo en un volumen V está dado por:

$$\boldsymbol{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}}\hat{e}_x(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})a + e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})a^\dagger)$$

usando que en el gauge de radiación: $\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ obtenemos

$$\boldsymbol{E}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_x(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})a - e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})a^\dagger)$$

(a) Cálculo del valor medio del campo $\boldsymbol{E}$ entre estados de número de fotones$|n\rangle$ es inmediato usando que $\langle n|\, a\, |n\rangle = \langle n|\, a^\dagger |ketn = 0$

$$\langle n|\, \boldsymbol{E}(\vec{r}, t)\, |n\rangle = 0$$

para la varianza necesitamos el valor medio del cuadrado del campo

$$\langle n|\, \boldsymbol{E}^2(\vec{r}, t)\, |n\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}\, \langle n|\, (e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})a^2 + e^{-2i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}a^{\dagger 2} - \underbrace{aa^\dagger}_{a^\dagger a+[a,a^\dagger} - a^\dagger a) = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}(2n+\frac{1}{2})$$

por lo que

$$Var(\boldsymbol{E}(\vec{r},t))_{|n\rangle} = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}(2n+1)$$

Si bien el valor medio del campo es nulo, existen fluctuaciones incluso en el vacío $|0\rangle$ (0 fotones). Estas fluctuaciones dan lugar a fenómenos observables por ejemplo la fuerza de Casimir y el corrimiento de Lamb en la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno.

(b) Cálculo del valor medio del campo $\boldsymbol{E}$ entre estados coherentes $|\alpha\rangle$. El complejo $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$, por lo que:

$$\langle\alpha|\,\boldsymbol{E}(\vec{r},t)\,|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_x(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})|\alpha|e^{i\varphi} - e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)})|\alpha|e^{-i\varphi})$$

de donde

$$\langle\alpha|\,\boldsymbol{E}(\vec{r},t)\,|\alpha\rangle = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}\hat{e}_x|\alpha|\sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)$$

por lo que el valor medio del campo entre estados coherentes sigue un comportamiento clásico, pues son ondas viajeras de amplitud proporcional a $|\alpha|$.

El cálculo de la varianza se deja como ejercicio a los alumnos .