Física Teórica II

Guía 5: Dinámica

Nicolás Mirkin

04 de mayo de 2021

Representación de Schrödinger

La evolución temporal en mécanica cuántica está representada a través de un operador unitario U(t), que cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t) = \frac{1}{i\hbar}H(t)U(t)$$

Ecuación de Schrödinger

En esta representación, la evolución temporal actúa sobre los estados, tal que: $|\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi_0\rangle$

En el caso que: $\frac{\partial}{\partial t}H(t) = 0$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{U(t)} = \mathrm{e}^{-\frac{it}{\hbar}H}$ (se puede escribir como serie de potencias de H)

Los autoestados de H, lo serán también de U:

$$\mathrm{H}\,|E_n\rangle = E_n\,|E_n\rangle \Longrightarrow \mathrm{U(t)}\,|E_n\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}H}\,|E_n\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}E_n}\,|E_n\rangle$$

Como las fases globales son irrelevantes, los autoestados de H no evolucionan en el tiempo (**son estados estacionarios**).

$$\Longrightarrow P(a \mid t) = |\langle a|E_n(t)\rangle|^2 = |\langle a|U(t)|E_n\rangle|^2 = \left|\langle a|e^{-\frac{it}{\hbar}E_n}|E_n\rangle\right|^2$$

$$= \left|e^{-\frac{it}{\hbar}E_n}\langle a|E_n\rangle\right|^2 = |\langle a|E_n\rangle|^2 = P(a|t=0)$$

Representación de Schrödinger

Instrucciones para resolver los ejercicios
(dim. finita y H's independientes del tiempo):

(1) Diagonalizamos H, encontrando sus autoestados y autovalores

$\mathrm{H}\,|E_n\rangle = E_n\,|E_n\rangle$ tal que: $\mathrm{U(t)}\,|E_n\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}H}\,|E_n\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}E_n}\,|E_n\rangle$

(2) Escribimos el estado inicial $|\psi_0>$, en la base de autoestados de H:

$|\psi_0\rangle = \sum_n \langle E_n|\psi_0\rangle\,|E_n\rangle = \sum_n c_n\,|E_n\rangle$ donde: $\mathrm{c}_n = \langle E_n|\psi_0\rangle$

(3) Finalmente, evolucionamos temporalmente:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)\,|\psi_0\rangle = \sum_n c_n U(t)\,|E_n\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{it}{\hbar}E_n}\,|E_n\rangle$$

$= \sum_n c_n(t)\,|E_n\rangle$ donde: $\mathrm{c}_n(t) = c_n e^{-\frac{it}{\hbar}E_n} = \langle E_n|\psi_0\rangle\,e^{-\frac{it}{\hbar}E_n}$

El estado evolucionado siempre quedará como una superposición de autoestados de energía, pesados por los coeficientes $c_n(t)$.

Problema II
(Precesión del spin)

El hamiltoniano de un sistema de espín 1/2 en un campo magnético externo uniforme B en la dirección ẑ está dado por:

$$\mathrm{H} = -\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z = -\omega S_z$$

(a) Verificar que los autoestados de S_z (|+> y |−>) son también autoestados de la energía, y calcular los correspondientes autovalores.
(b) Suponer que a t=0 el sistema se encuentra en el estado |α>= 1√2 (|+>+|−>) (que corresponde al estado $|S_x$,+>). Hallar la evolución temporal |α(t)> de dicho estado. ¿Qué resultados pueden obtenerse al medir S_x a un tiempo posterior? ¿Con qué probabilidades?
(c) Calcular $\langle S_x \rangle$ y $\langle S_y \rangle$ en función del tiempo.
(d) Encontrar el versor **n̂**(t) para el cual |α(t)> resulta ser autoestado de **S**·**n̂**(t).

(a) ¿Los autoestados de S_z son también autoestados de H?

$$\mathrm{H} = -\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z = -\omega S_z$$ en donde $\mathrm{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$

Veamos...

$$\begin{aligned} H\,|\pm\rangle &= -\omega S_z\,|\pm\rangle \\ &= -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z\,|\pm\rangle \\ &= \mp\frac{\hbar\omega}{2}\,|\pm\rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Sí, lo son.

(b) Analicemos la evolución temporal:

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= U(t)\,|\alpha\rangle \\ &= e^{-iHt/\hbar}\left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{e^{-iE_+t/\hbar}\,|+\rangle + e^{-iE_-t/\hbar}\,|-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{e^{+i\omega t/2}\,|+\rangle + e^{-i\omega t/2}\,|-\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

¿Qué resultados pueden obtenerse si mido S_x a un tiempo arbitrario? ¿Con qué probabilidades?

Para responder esta pregunta, nos conviene expresar el estado evolucionado en la base en que el operador S_x es diagonal, es decir:

$$|S_x, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$$

Si escribimos la base de S_z en función de la base de S_x, tenemos:

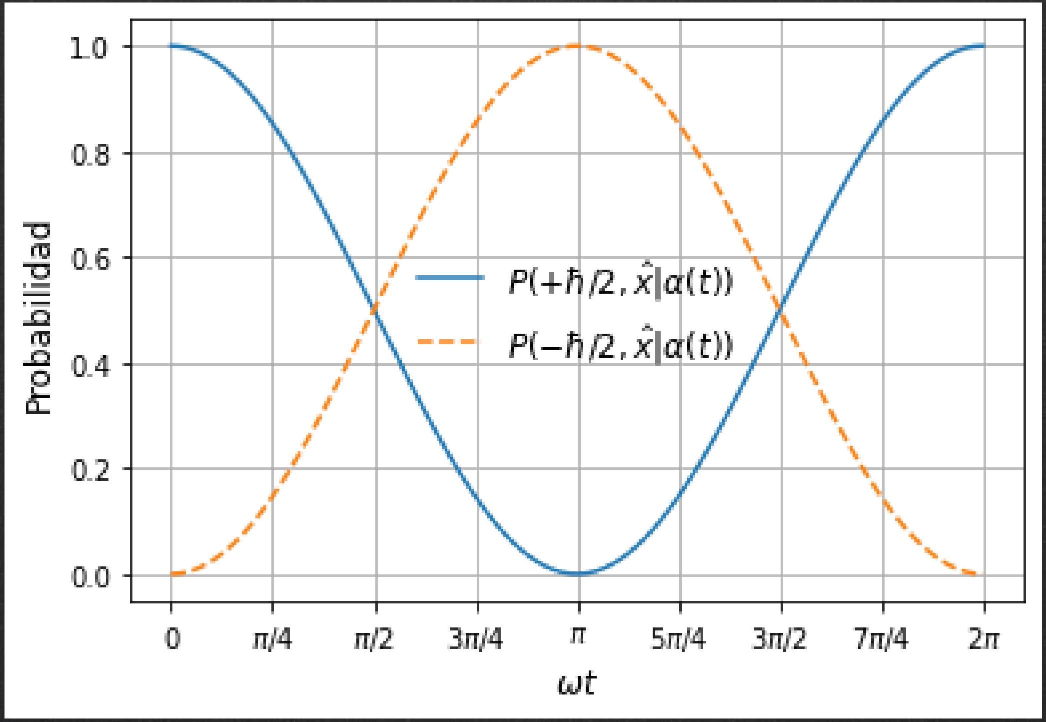
$$\begin{cases} |+\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|S_x, +\rangle + |S_x, -\rangle) \\ |-\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|S_x, +\rangle - |S_x, -\rangle) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |\alpha(t)\rangle &= \frac{e^{+i\omega t/2}\,|+\rangle + e^{-i\omega t/2}\,|-\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{+i\omega t/2}(|S_x, +\rangle + |S_x, -\rangle) + e^{-i\omega t/2}(|S_x, +\rangle - |S_x, -\rangle)\right) \\ &= \cos(\omega t/2)\,|S_x, +\rangle + i\sin(\omega t/2)\,|S_x, -\rangle \end{aligned}$$

Entonces… ¿qué resultados pueden obtenerse si mido S_x a un tiempo arbitrario? ¿Y con qué probabilidades?

Aplicando la regla de Born… tenemos dos posibilidades

$$P(+\hbar/2|\alpha(t)) = \langle\alpha(t)|S_x,+\rangle\langle S_x,+|\alpha(t)\rangle = |\langle S_x,+|\alpha(t)\rangle|^2$$
$$= \cos{(\omega t/2)}^2$$
$$P(-\hbar/2|\alpha(t)) = \langle\alpha(t)|S_x,-\rangle\langle S_x,-|\alpha(t)\rangle = |\langle S_x,-|\alpha(t)\rangle|^2$$
$$= \sin{(\omega t/2)}^2$$



(c) Calculemos $\langle S_x \rangle$ y $\langle S_y \rangle$ en función del tiempo

$$|\alpha(t)\rangle = \frac{e^{+i\omega t/2}|+\rangle + e^{-i\omega t/2}|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= [...] = \cos(\omega t/2)|S_x,+\rangle + i\sin(\omega t/2)|S_x,-\rangle$$

$$\Rightarrow S_x|\alpha(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t/2)|S_x,+\rangle - \frac{\hbar}{2}i\sin(\omega t/2)|S_x,-\rangle$$

$$\langle S_x\rangle = \langle\alpha(t)|S_x|\alpha(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\cos(\omega t/2)^2 - \sin(\omega t/2)^2\right) = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t)$$

Tiene sentido por definición de valor medio: $\langle X\rangle = \sum p(x_i)x_i$

Para no ser repetitivos y ejercitar nuestras “múltiples habilidades”… calculemos $\langle S_y \rangle$ de otra manera:

Nuestro estado es: $|\alpha(t)\rangle = \dfrac{e^{+i\omega t/2}|+\rangle + e^{-i\omega t/2}|-\rangle}{\sqrt{2}}$

Usando notación de Dirac, tenemos que S_y

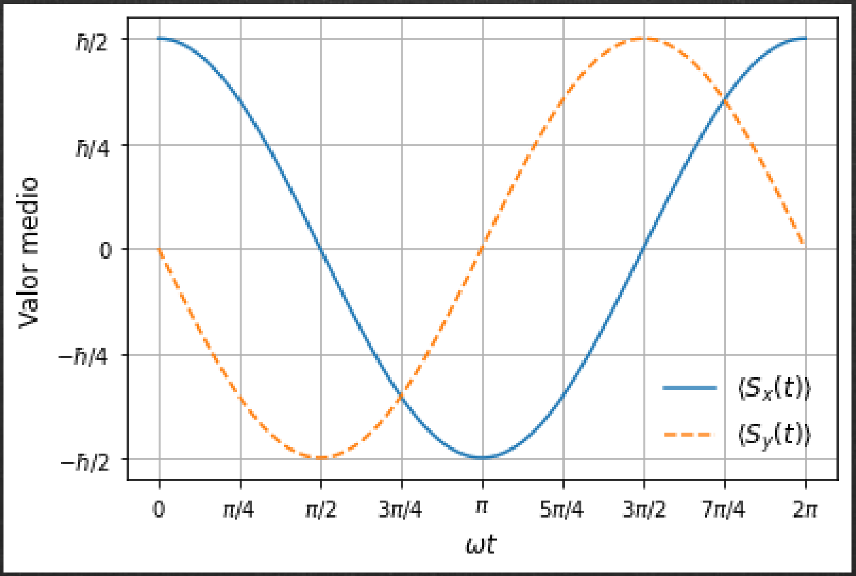
$$S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\left(-i|+\rangle\langle -| + i|-\rangle\langle +|\right)$$

$$S_y\,|\alpha(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(-i\,|+\rangle\langle-| + i\,|-\rangle\langle+|\right)\frac{e^{+i\omega t/2}\,|+\rangle + e^{-i\omega t/2}\,|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{i\hbar}{2\sqrt{2}}\left(e^{+i\omega t/2}\,|-\rangle - e^{-i\omega t/2}\,|+\rangle\right)$$

$$\langle\alpha(t)| = \frac{e^{-i\omega t/2}\,\langle+| + e^{i\omega t/2}\,\langle-|}{\sqrt{2}}$$

$$\langle S_y\rangle = \langle\alpha(t)|\,S_y\,|\alpha(t)\rangle = \tfrac{i\hbar}{4}\left(e^{+i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) = -\tfrac{\hbar}{2}\sin(\omega t)$$



(d) Encontrar el versor **n̂**(t) para el cual |α(t)> resulta ser autoestado de **S**·**n̂**(t).

Nuestro estado es: $|\alpha(t)\rangle = \dfrac{e^{+i\omega t/2}|+\rangle + e^{-i\omega t/2}|-\rangle}{\sqrt{2}}$ que salió de:

H = - $\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z = -\omega S_z$

Ahora bien, recordemos cómo son los autoestados de **S**·**n̂**(t). Estos estados parametrizan todos los estados puros de un sistema de dos niveles. Se pueden pensar sobre la superficie de una esfera (esfera de “Bloch”)

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\beta/2)|+\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)|-\rangle$$

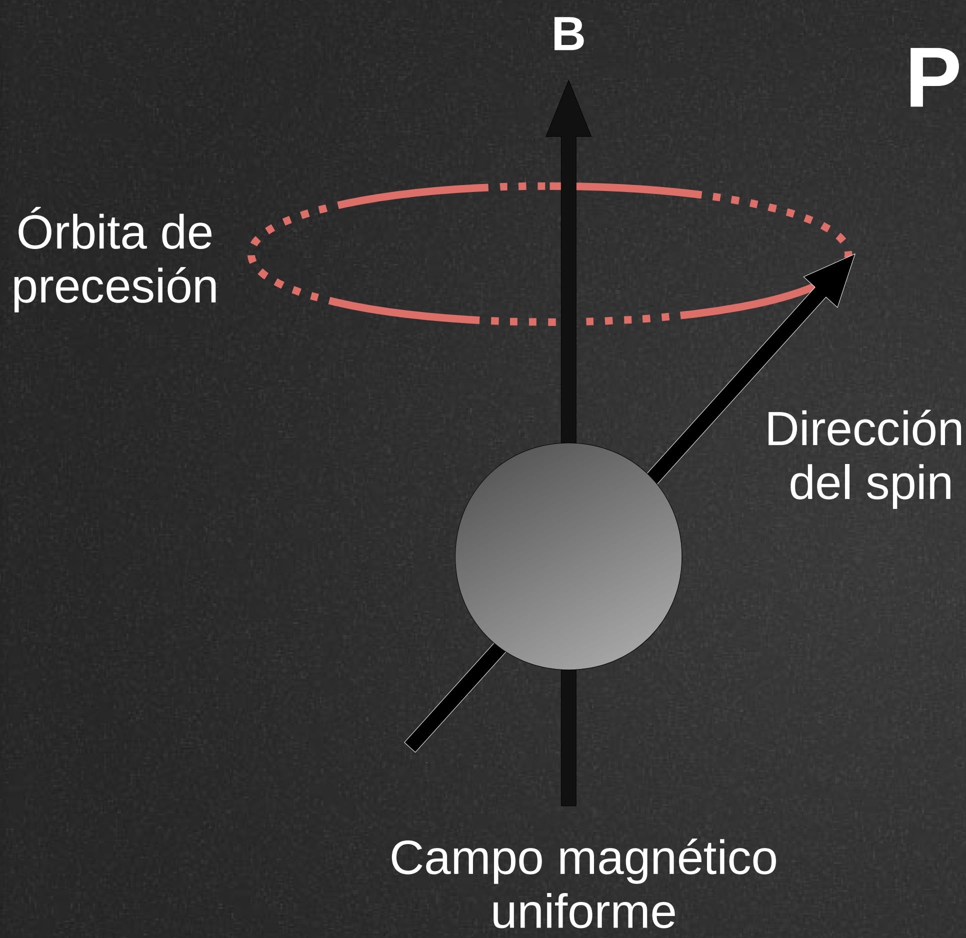
en donde $\widehat{n} = (\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta)$

Entonces, ¿cómo tiene que ser **n̂**(t) tal que |α(t)> sea autoestado de **S**·**n̂**(t)?

Sí tomamos $\beta = \pi/2$ $\Rightarrow$ $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + e^{i\alpha}|-\rangle\right)$

$|\alpha(t)\rangle = |\psi(t)\rangle \leftrightarrow -\omega t = \alpha$ $\Rightarrow$ $\boxed{\widehat{n} = (\cos(\omega t), -\sin(\omega t), 0)}$

Precesión del spin



$$\widehat{n} = (\cos(\omega t), -\sin(\omega t), 0)$$