Física Teórica 2

Guía 4: Matriz Densidad. Estados Reducidos

Mateo Koifman

29 de abril de 2021

Sistemas compuestos y subsistemas

En esta parte de la guía nos va a interesar estudiar sistemas compuestos y describir tanto el estado global como el estado de las partes. Para esto necesitamos definir la **matriz densidad reducida**.

Traza parcial y Matriz densidad reducida

Traza parcial: Dado un operador $\hat{O}_{\mathcal{AB}} = \sum_{jk} a_{jk} \hat{A}_j \otimes \hat{B}_k$, se define la traza parcial sobre $\mathcal{B}$

$$\hat{O}_{\mathcal{A}} \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}(\hat{O}_{\mathcal{AB}}) = \sum_{jk} a_{jk} \hat{A}_j \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}(\hat{B}_k)$$

Matriz densidad reducida: Dado un sistema compuesto con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, podemos describir el estado en $\mathcal{H}$ mediante la matriz densidad ρ. Si nos interesa únicamente describir el estado en el subsistema $\mathcal{A}$, podemos hacerlo mediante la matriz densidad reducida $\rho_{\mathcal{A}}$

$$\rho_{\mathcal{A}} \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{B}}(\rho)$$

que para cualquier operador $O_{\mathcal{A}}$ en $\mathcal{A}$ cumple[1]

$$\langle O_{\mathcal{A}} \rangle = \mathrm{Tr}(\rho_{\mathcal{A}} O_{\mathcal{A}})$$

[1] estas son dos definiciones equivalentes de la matriz densidad reducida

Estados entrelazados

Dado un sistema compuesto con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$, *a veces* es posible escribir un estado $|\Psi_{ne}\rangle \in \mathcal{H}$ como el producto de dos estados $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ y $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$:

$$|\Psi_{ne}\rangle = |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

En ese caso, decimos que $|\Psi_{ne}\rangle \in \mathcal{H}$ es un **estado no entrelazado**.

Existen otros estados en $\mathcal{H}$ que no se van a poder escribir como un estado producto, es decir que

$$|\Psi_e\rangle \neq |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

para cualquier $|\chi\rangle$ y $|\phi\rangle$. En el caso en que $|\Psi_e\rangle$ no se puede escribir como un estado producto, decimos que es un **estado entrelazado**.

Si el estado en $\mathcal{H}$ es $|\Psi_{ne}\rangle = |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle$, podemos reconocer que el estado del subsistema $\mathcal{A}$ es $|\chi\rangle$ y el estado en el subsistema $\mathcal{B}$ es $|\phi\rangle$. En cambio para un estado entrelazado nos vamos a encontrar con que el estado de los subsistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es un estado mixto.

Una definición equivalente es:

$$|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \text{ es un estado entrelazado} \Leftrightarrow \rho_{\mathcal{A}} \text{ y } \rho_{\mathcal{B}} \text{ son estados mixtos.}$$

Problema 9

P9 Considere un sistema compuesto por dos partículas distinguibles de spin ½ y sean $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ los auto-estados de S_z $\pm\hbar/2$, respectivamente. Para cada uno de los siguientes cuatro estados,

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right), \qquad |\Psi_3\rangle = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\right),$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right), \qquad |\Psi_4\rangle = \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\right),$$

$$|\Psi_5\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle .$$

(a) Determine si el estado del sistema compuesto es puro o mixto.

(b) Calcule la matriz densidad reducida para cada partícula. ¿Es el estado de cada subsistema puro o mixto?

(c) Determine si el estado del sistema compuesto es entrelazado.

(d) Proponga un observable (no totalmente degenerado) del sistema compuesto tal que su medición sobre el estado dado tenga un único resultado posible con certeza. ¿Puede hacer lo mismo para el estado de la partícula 1 considerando mediciones sólo sobre ese subsistema?

Estado $|\Psi_1\rangle$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right)$$

$$\rho = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| = \frac{1}{2}\Big(\,|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\,\Big) \quad \Big(\,\langle\uparrow| \otimes \langle\downarrow| - \langle\uparrow| \otimes \langle\uparrow|\,\Big)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow| - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,\Big)$$

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2(\rho) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_2\Big(\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow| - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,\Big)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Tr}_2\Big(\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\,\Big) - \mathrm{Tr}_2\Big(\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\,\Big) - \mathrm{Tr}_2\Big(\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\,\Big) +$$

$$+\,\mathrm{Tr}_2\Big(\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,\Big)\Big]$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\Big[\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,\mathrm{Tr}\Big(\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\,\Big) - |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,\mathrm{Tr}\Big(\,|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\,\Big) - |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,\mathrm{Tr}\Big(\,|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\,\Big) + |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,\mathrm{Tr}\Big(\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,\Big)\Big]$$

Usando que $\mathrm{Tr}(|\alpha\rangle\langle\beta|) = \langle\beta|\alpha\rangle$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\Big(\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,\Big) = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

Estado $|\Psi_1\rangle$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right)$$

$$\rho = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\Big) \quad \Big(\langle\uparrow| \otimes \langle\downarrow| - \langle\uparrow| \otimes \langle\uparrow|\Big)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow| - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\Big)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes {\color{green}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|} - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes {\color{red}|\downarrow\rangle\langle\uparrow|} - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes {\color{red}|\uparrow\rangle\langle\downarrow|} + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes {\color{green}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|}\Big)^2$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\Big) = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$\rho = \frac{1}{2}\Big({\color{green}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|} \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow| - {\color{green}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|} \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - {\color{green}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|} \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + {\color{green}|\uparrow\rangle\langle\uparrow|} \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\Big)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\Big(|\downarrow\rangle\langle\downarrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow|\Big)$$

[2] Tr(.)=1, Tr(.)=0

[2] Tr(.)=1, Tr(.)=0

Estado $|\Psi_1\rangle$

$$
\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right) \\
\rho &= \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow| - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \Big) \\
\rho_1 &= |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \\
\rho_2 &= \frac{1}{2}\Big(|\downarrow\rangle\langle\downarrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \Big)
\end{aligned}
$$

(a) El estado en $\mathcal{H}$ es puro, pues $\rho = |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1|$[3]

(b) ρ_1 es puro. ρ_2 también: notemos que $\rho_2^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y $\mathrm{Tr}(\rho_2^2) = 1$

(c) $|\Psi_1\rangle$ es no entrelazado. Notemos de hecho que

$$
\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= |\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle) = |\uparrow, z\rangle \otimes |\downarrow, x\rangle \\
\rho_1 &= |\uparrow, z\rangle\langle\uparrow, z| \\
\rho_2 &= (|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle)(\langle\downarrow| - \langle\uparrow|) = |\downarrow, x\rangle\langle\downarrow, x|
\end{aligned}
$$

[3] También podemos verificar que $\mathrm{Tr}(\rho^2) = 1$

Estado $|\Psi_1\rangle$

$$
\begin{aligned}
&|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right) = |\uparrow, z\rangle \otimes |\downarrow, x\rangle \\
&\rho_1 = |\uparrow\rangle \langle\uparrow| \\
&\rho_2 = \frac{1}{2}\Big(|\downarrow\rangle \langle\downarrow| - |\downarrow\rangle \langle\uparrow| - |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + |\uparrow\rangle \langle\uparrow| \Big) = |\downarrow, x\rangle \langle\downarrow, x|
\end{aligned}
$$

(d) Es posible encontrar observables con un único posible resultado tanto para el sistema compuesto como para el sistema 1. Por ejemplo, los proyectores

$$O_{12} = |\Psi_1\rangle \langle\Psi_1|$$

$$O_1 = |\uparrow\rangle \langle\uparrow|$$

Otro ejemplo también puede ser

$$O'_{12} = \sigma_z \otimes \sigma_x$$

$$O'_1 = \sigma_z$$

Estado $|\Psi_2\rangle$

Análogamente al caso de $|\Psi_1\rangle$,

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right)$$

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow| - |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \Big)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \Big)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \Big)$$

(a) El estado en $\mathcal{H}$ es puro, pues $\rho = |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|$
(b) Los estados reducidos son mixtos, pues son una mezcla 50/50 de $|\uparrow, z\rangle$ y $|\downarrow, z\rangle$
(c) El estado es entrelazado, pues el estado global es puro pero el de los subsistemas mixto. Podemos verificar que no es posible escribir a $|\Psi_2\rangle$ como un estado producto.
(d) Podemos encontrar observables con un único resultado en $\mathcal{H}$, por ejemplo

$$O_{12} = |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|$$

$$O'_{12} = \sigma_z \otimes \sigma_z$$

Pero no existe ningún observable (no degenerado) cuyo resultado podamos predecir con certeza para el subsistema 1. Más aún, la clase pasada vimos que la probabilidad de obtener cualquier resultado es del 50 % para todo observable.

Entrelazamiento

El entrelazamiento de los estados es una característica puramente cuántica y que no tiene análogo clásico.

Schrödinger: *"Uno puede conocer todo lo máximo que se puede de un sistema y nada de un subsistema"*

Podemos ver en el inciso (d) que, en el caso del estado entrelazado, puedo predecir algunos resultados de experimentos con 100 % de probabilidad, mientras que en el estado de los subsistemas no podemos predecir ningún resultado.