Física Teórica II

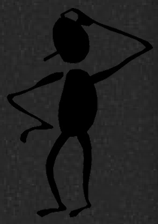
Guía 5: Dinámica

Nicolás Mirkin

11 de mayo de 2021

Matriz densidad, evolución temporal.

Extendimos la definición de estado cuántico…
¿no tenemos que extender también el postulado de evolución temporal?



El operador evolución temporal es solución de la ecuación diferencial:

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) = H(t) U(t)$$

Si inicialmente el sistema se encuentra en el estado ρ_0, a tiempo t el estado es:

$$\rho(t) = U(t)\, \rho_0\, U^\dagger(t)$$

Derivando en función del tiempo, se obtiene una ecuación diferencial para ρ:
(Ec. de Liouville-Von Neumann)

$$\frac{d}{dt}\rho = -\frac{1}{i\hbar}[\rho, H]$$

Esto es consistente con lo que ya sabemos de estados puros.
En efecto, tenemos 2 formas diferentes de representar el mismo estado

$$\begin{cases} |\psi(t)\rangle = U(t)\, |\psi_0\rangle \\ \rho(t) = U(t) \rho_0 U^\dagger(t) = U(t)\, |\psi_0\rangle\langle\psi_0|\, U^\dagger(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \end{cases}$$

Matriz densidad, evolución temporal.

Más en general, si inicialmente tenemos una mezcla estadística de estados, la evolución temporal será:

$$\rho(t) = U(t)\left(\sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle\!\left\langle\psi_i\right|\right)U^\dagger(t) = \sum_i p_i U(t)\left|\psi_i\right\rangle\!\left\langle\psi_i\right|U^\dagger(t)$$

$$= \sum_i p_i \left|\psi_i(t)\right\rangle\!\left\langle\psi_i(t)\right| \quad \Rightarrow \quad \text{(bastante intuitivo)}$$

Importante: la pureza de un estado es constante en el tiempo!
(si la evolución temporal es unitaria)

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left[\rho^2(t)\right] &= \mathrm{tr}\left[\rho(t)\rho(t)\right] = \mathrm{tr}\left[U(t)\rho_0 U^\dagger(t)U(t)\rho_0 U^\dagger(t)\right] \\
&= \mathrm{tr}\left[U(t)\rho_0^2 U^\dagger(t)\right] = \mathrm{tr}\left[\rho_0^2 U^\dagger(t)U(t)\right] \\
&= \mathrm{tr}\left[\rho_0^2\right]
\end{aligned}$$

Matriz densidad, evolución temporal.

Problema 12: Hallar la evolución temporal de un sistema de spin ½ que a t=0 se encuentra en un estado arbitrario ρ=1/2(I+**σp**) (|**p**|≤1), en presencia de un campo magnético uniforme **B**=Bẑ (recordar H=ωS_z).

El operador hermítico (observable) más general posible de dimensión 2 se puede siempre escribir de la forma

$$\begin{aligned} A &= a_0\mathbb{I} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \qquad a_0 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \\ &= a_0\mathbb{I} + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z \end{aligned}$$

El operador densidad también se escribe así, pero además debe satisfacer positividad y que la traza sea 1.

El estado físico más general de dimensión 2 es:

$\rho = \frac{\mathbb{I}+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}, \qquad \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3,\ |\boldsymbol{p}| \leq 1$ donde $\boldsymbol{p} = \quad \mathrm{tr}(\rho\boldsymbol{\sigma}) = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$

Todo estado de dimensión 2 queda totalmente determinado por el vector **p (vector de Bloch)**. Recordar problema 8 (guía 4).

Obs: si el estado es puro **p** tiene norma 1 (los estados puros se pueden pensar sobre la superficie de *la esfera de Bloch*)

Matriz densidad, evolución temporal.

Veamos cómo es la evolución temporal de este estado:

$$\mathrm{H}= \hbar\omega\sigma_z/2$$

El operador evolución es $\mathrm{U(t)} = \mathrm{e}^{-iHt/\hbar} = e^{-i\omega\sigma_z t/2}$

La evolución está determinada por:

$$\rho(t) = U(t)\rho U^\dagger(t) = U(t)\frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)U^\dagger(t)$$

Usando que el H es diagonal, podemos escribir:

$$\mathrm{U(t)}\!=\!\mathrm{e}^{-\frac{i\omega t\sigma_z}{2}} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \quad \mathrm{U}^\dagger(t) = e^{i\omega t\sigma_z/2} = \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

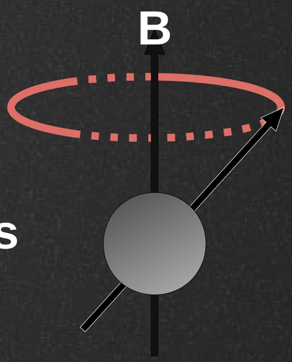
Y además $\rho = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 1-p_z \end{pmatrix}$

Si seguimos la cuenta...

Llegamos a que la evolución temporal es:

$$
\begin{aligned}
\rho(t) &= U(t)\rho U^\dagger(t) \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & 1-p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \\
&= [\dots] \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+p_z & e^{-i\omega t}(p_x - ip_y) \\ e^{i\omega t}(p_x + ip_y) & 1-p_z \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{\sigma})
\end{aligned}
$$

Recuperamos la precesión del spin!



Además, fíjense que:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathrm{tr}(\rho \boldsymbol{\sigma})$$

$$\langle \sigma_x \rangle = \mathrm{tr}(\rho \sigma_x) = [\dots] = p_x \cos(\omega t) - p_y \sin(\omega t)$$

$$\langle \sigma_y \rangle = \mathrm{tr}(\rho \sigma_y) = [\dots] = p_x \sin(\omega t) + p_y \cos(\omega t)$$

El milagro de la adecuación del lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que ni entendemos, ni merecemos

Eugene Paul Wigner
Físico y matemático (1902-1995)