Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2021

Guía 6: Oscilador Armónico

I. Oscilador Armónico

El Hamiltoniano del oscilador armónico en una dimensión puede ser escrito en la forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}),$$

donde se definieron los operadores a y $a^\dagger$, llamados operadores de *aniquilación (bajada)* y *creación (subida)*, respectivamente, como la siguiente combinación lineal de x y p

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right).$$

con las propiedades:

$$a\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle, \qquad a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle.$$

Se deduce que $|n\rangle$ es auto-estado del operador de número $N = aa^\dagger$ con autovalor n un entero no negativo, y por consiguiente auto-estado del Hamiltoniano con autovalor $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$.

$\boxed{\textbf{P1}}$ **Valores de expectación y varianzas en los autoestados de energía**. Utilizando las definiciones referidas a un oscilador armónico,

(a) Calcule $\langle m|a|n\rangle$, $\langle m|a^\dagger|n\rangle$, $\langle m|a^2|n\rangle$, $\left\langle m\middle|\left(a^\dagger\right)^2\middle|n\right\rangle$.

(b) Calcule $\langle m|x|n\rangle$, $\langle m|p|n\rangle$, $\langle m|\{x,p\}|n\rangle$, $\langle m|x^2|n\rangle$ y $\langle m|p^2|n\rangle$. (Sugerencia: expanda x y p en términos de a y $a^\dagger$).

(c) Evalúe los resultados del ítem anterior para el caso $m = n$, obteniendo los valores medios $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p^2\rangle$ para los autoestados de energía.

(d) Utilizando los resultados anteriores, calcule la varianza de los operadores x y p en los autoestados del oscilador armónico y verifique que se satisface la relación

$$\mathrm{Var}(x)\,\mathrm{Var}(p) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \hbar^2,$$

donde $\mathrm{Var}(\cdot)$ es la varianza del respectivo operador en el estado $|n\rangle$. ¿Qué ocurre para $n = 0$? ¿Qué condición impone esto sobre la función de onda del estado fundamental?

(e) Compruebe que los valores de expectación de la energía cinética y potencial tomados con respecto a un autoestado de la energía son iguales (cumple el teorema del virial).

$\boxed{\textbf{P2}}$ Para un oscilador armónico en una dimensión, sin trabajar con las funciones de onda,

(a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ que maximice $\langle x\rangle$.

(b) Considere que el oscilador se encuentra a $t = 0$ en el estado hallado en el punto (a). ¿Cuál es el estado para $t > 0$ en la representación de Schrödinger?

(c) Evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ como función del tiempo para $t > 0$ usando: (i) la representación de Schrödinger, y (ii) la representación de Heisenberg.

(d) Evalúe la varianza de x como función del tiempo en ambas representaciones.

$\boxed{\textbf{P3}}$ Considere la función de correlación a dos tiempos de la posición,

$$C(t) = \langle x(t)\,x(0)\rangle - \langle x(t)\rangle\,\langle x(0)\rangle,$$

donde $x(t)$ es el operador de posición en la representación de Heisenberg. Evalúe explícitamente la función de correlación para el estado fundamental de un oscilador armónico en una dimensión.

P4 **Estados coherentes.** Se definen los estados *coherentes* de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de aniquilación a,

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,,$$

donde α es en general un número complejo (note que a no es hermítico).

(a) Calcule $\langle\alpha|a|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|a^\dagger|\alpha\rangle$, $\langle\alpha|a^2|\alpha\rangle$, y $\left\langle\alpha\middle|\left(a^\dagger\right)^2\middle|\alpha\right\rangle$.

(b) Calcule el valor medio del operador de número (N) y su varianza para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

(c) Calcule el valor medio de la energía (H) y su varianza para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

(d) Calcule el valor medio del operador posición (x) y su varianza para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

(e) Calcule el valor medio del operador momento (p) y su varianza para un estado coherente $|\alpha\rangle$.

(f) A partir de los resultado anteriores demuestre que todo estado coherente satisface la relación de mínima incerteza. ¿Qué dice esto sobre la función de onda de un estado coherente? Escriba explícitamente la función de onda $\langle x|\alpha\rangle$.

(g) Usando la representación de Heisenberg calcule los valores medios de posición y momento en función del tiempo, $\langle x\rangle(t)$ y $\langle p\rangle(t)$, para un estado coherente $|\alpha\rangle$. ¿Cómo puede interpretar estos resultados? (puede por ejemplo mirar los casos particulares en que α es real o imaginario puro).

(h) Muestre que la descomposición de un estado coherente $|\alpha\rangle$ en la base $\{|n\rangle\}$ es

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,.$$

(Sugerencia: le puede resultar útil recordar que $|n\rangle = (a^\dagger)^n/\sqrt{n!}\,|0\rangle$ y luego pida que $|\alpha\rangle$ esté normalizado).

(i) Muestre que el producto interno $\langle\beta|\alpha\rangle$ entre dos estados coherentes, $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$, es

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2-2\alpha\beta^*\right)\right].$$

¿Son los estados coherentes ortogonales? ¿Por qué?

(j) [*] Muestre que los estados coherentes forman una base, es decir que satisfacen la relación de completitud

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{I}, \quad \text{donde } \mathrm{d}^2\alpha = \mathrm{d}(\,\mathrm{Re}\alpha)\,\mathrm{d}(\,\mathrm{Im}\alpha).$$

(Sugerencia: use la expansión de los estados coherentes en la base de autoestados del operador número y luego escriba la integral en coordenadas polares usando que $\alpha = |\alpha|\,e^{i\phi} = re^{i\phi}$. Finalmente use que $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,e^{i(n-m)\phi} = 2\pi\delta_{nm}$ y $\int \mathrm{d}t\,e^{-t}t^n = n!$, con $n,m\in\mathbb{N}_0$).

(k) Muestre que la evolución temporal de un estado coherente $|\alpha\rangle$ en la representación de Schrödinger es es un nuevo estado coherente $|\alpha(t)\rangle$. Encuentre la expresión de $\alpha(t)$ y dibuje en el plano complejo la evolución de $\alpha(t)$. ¿Cómo varían en función del tiempo $\langle H\rangle$, $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$? (compare el resultado con el obtenido en el ítem (g)).

(l) Si se mide la energía de un oscilador armónico en un estado coherente $|\alpha\rangle$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad? ¿Qué distribución de probabilidades se obtiene para los autovalores del operador número?

(m) Calcule las desviaciones estándar (Sdv) relativas de N y H, es decir

$$\frac{\mathrm{Sdv}(N)}{\langle N\rangle} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(N)}}{\langle N\rangle}, \qquad \frac{\mathrm{Sdv}(H)}{\langle H\rangle} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(H)}}{\langle H\rangle}.$$

¿Qué sucede para $|\alpha|\gg 1$?

(n) Calcule $\langle H\rangle$, $\langle p\rangle$ y $\langle x\rangle$ y muestre que satisfacen la misma relación que las variables clásicas (es decir, $E = p^2/2m + m\omega^2x^2/2$) para $E\gg\hbar\omega$. ¿Qué condición impone esto para los valores de α?

P5 **Operador desplazamiento en el espacio de fases.** Se define el *operador de desplazamiento en el espacio de fases* como

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a),$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Muestre que $D(\alpha)$ es unitario y además $D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$.

(b) Muestre que

$$D(\alpha + \beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{-i\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)}.$$

(c) Muestre que

$$D^\dagger(\alpha)\, a\, D(\alpha) = a + \alpha, \qquad D^\dagger(\alpha)\, a^\dagger\, D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*,$$

$$D^\dagger(\alpha)\, x\, D(\alpha) = x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2\mathrm{Re}\alpha, \qquad D^\dagger(\alpha)\, p\, D(\alpha) = p + \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} 2\mathrm{Im}\alpha.$$

(d) Muestre que el estado $|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$ es autoestado del operador de aniquilación a. ¿Cuál es el autovalor correspondiente? ¿Qué tipo de estado es $|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$?

(e) Muestre que la acción de $D(\alpha)$ sobre el autoestado $|0\rangle$ de energía satisface

$$D(\alpha)\,|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger}\,|0\rangle\,.$$

Luego, expanda $e^{\alpha a^\dagger}$ en serie de potencias y encuentre la expansión del estado $|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$ en la base de autoestados de energía, $\{|n\rangle\}$. Compare con lo obtenido en el ejercicio **P4**.

(f) Evalúe $D(\alpha)$ para los casos particulares en que (i) α es real, y (ii) α es imaginario puro. ¿Qué operadores se obtienen en tales casos? Y para el caso de α complejo arbitrario, ¿cómo puede extender esta interpretación del operador $D(\alpha)$?

(g) Utilizando cómo transforman x y p ante la acción de $D(\alpha)$, calcule el valor medio y varianza de posición y momento en los estados coherentes.

P6 Considere una partícula sujeta a un potencial de oscilador armónico en una dimensión. Suponga que a $t = 0$ el estado viene dado por

$$|\varphi\rangle = \exp\left(\frac{-ipd}{\hbar}\right)|0\rangle\,,$$

donde p es el operador de momento y d es un número con dimensiones de longitud.

(a) Usando la representación de Heisenberg, evalúe el valor de expectación $\langle x\rangle$ para $t > 0$. Interprete el resultado. ¿Qué tipo de evolución temporal sigue $\langle x\rangle$?

(b) Muestre que $|\varphi\rangle$ es autoestado del operador de aniquilación a y calcule su autovalor. ¿Qué tipo de estado describe $|\varphi\rangle$?

(c) Calcule le probabilidad de encontrar a $t = 0$ el estado inicial $|\phi\rangle$ en el estado fundamental $|0\rangle$. ¿Cambia esta probabilidad para $t > 0$?

P7 Considere un oscilador en un estado inicial formado por una superposición de dos estados coherentes; $|\psi\rangle = N(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$.

(a) Calcule el factor de normalización N.

(b) Calcule y grafique cualitativamente las densidades de probabilidad $|\langle x|\psi\rangle|^2$ y $|\langle p|\psi\rangle|^2$. ¿Cómo cambian en función del tiempo?

(c) Calcule los valores medios $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ en función del tiempo.

P8 Un sistema cuántico con Hamiltoniano H en equilibrio térmico a temperatura T está descripto por el estado de Gibbs τ_β, dado por

$$\tau_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{Z}, \qquad \text{con } Z = \mathrm{tr}[e^{-\beta H}], \quad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

(a) Calcule la forma explícita de la matriz densidad térmica de un oscilador armónico.
Ayuda: Recuerde la serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

(b) Calcule la probabilidad $P(n)$ de tener n excitaciones, y el valor medio del número de excitaciones $\langle n \rangle$, a una dada temperatura. Interprete. (el interprete es para quién haya cursado Física Teórica 3)

II. Otros Potenciales

P9 **Oscilador armónico forzado.** Considere el problema de un oscilador armónico unidimensional forzado, cuyo Hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - Fx,$$

donde x y p son los operadores posición y momento, respectivamente, y F es una constante real con unidades de fuerza (que puede corresponder, por ejemplo, a un campo gravitatorio o a un campo electrostático uniforme).

(a) Escriba el Hamiltoniano H en función de los operadores de creación ($a^\dagger$) y aniquilación (a) del oscilador armónico ordinario de frecuencia ω: $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$.

(b) Sea $N = a^\dagger a$ el operador de número del oscilador armónico ordinario y $\{|n\rangle\}$ su base de autoestados. ¿Coincide la base de autoestados del operador N con la del Hamiltoniano forzado?

(c) Dado un autoestado $|n\rangle$ de N, definimos el estado trasladado una distancia ℓ, $|n,\ell\rangle$ como

$$|n,\ell\rangle = e^{-ip\ell/\hbar}\,|n\rangle\,.$$

Encuentre el valor de ℓ tal que $|n,\ell\rangle$ es autoestado del Hamiltoniano forzado. Interprete el resultado. ¿Cuál es la energía correspondiente?

(d) Recuerde que un estado coherente del oscilador armónico ordinario, $|\alpha\rangle$, se puede escribir como $|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle$, donde $D(\alpha) = \exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\right)$. Deduzca entonces que $|0,\ell\rangle$ es un estado coherente del oscilador ordinario. ¿Cuál es el valor de α correspondiente?

(e) Calcule la varianza de la posición y del momento en el estado $|n,\ell\rangle$. Verifique que se satisface la relación de incerteza generalizada. ¿Qué sucede para $n = 0$? ¿Qué nos dice esto sobre la función de onda del estado fundamental del oscilador forzado? (Sugerencia: calcule los operadores transformados $e^{ip\ell/\hbar}xe^{-ip\ell/\hbar}$, $e^{ip\ell/\hbar}pe^{-ip\ell/\hbar}$, $e^{ip\ell/\hbar}x^2e^{-ip\ell/\hbar}$, $e^{ip\ell/\hbar}p^2e^{-ip\ell/\hbar}$, y luego use las expresiones de los valores medios de posición y momento del oscilador ordinario calculados en el ejercicio **P1**).

(f) Usando la representación de Heisenberg, calcule $x(t)$ y $p(t)$. Use esto para luego calcular $\langle x(t)\rangle$ y $\langle p(t)\rangle$ para un autoestado de energía $|n,\ell\rangle$.

P10 **Niveles de Landau: movimiento de un electrón libre en un campo magnético.** El Hamiltoniano de un electrón en presencia de un campo magnético externo estático con potencial vector $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(x,y,z)\right)^2.$$

Definimos los operadores Π_i, $i = x, y, z$ como

$$\Pi_i = p_i - \frac{eA_i}{c}.$$

(a) Escriba el Hamiltoniano en función de los operadores Π_i.

(b) Calcule $[x_i, \Pi_j]$ (donde x_i, $i = 1,2,3$ son los operadores de posición x, y, z). ¿Qué relaciones de conmutación se obtienen? Interprete.

(c) Calcule $[\Pi_i, \Pi_j]$. Interprete.

Considere el caso en que el campo magnético es uniforme en la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, es decir $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$. En tal caso, en un gauge apropiado se puede tomar como potencial vector $\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_x(x,y)\hat{\boldsymbol{x}} + A_y(x,y)\hat{\boldsymbol{y}}$, con $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$. En este gauge tenemos que $\Pi_z = p_z$.

(d) Muestre que entonces $[p_z, H] = 0$. ¿Qué consecuencias tiene esto? ¿Cuáles son los autovalores del operador p_z?

(e) ¿Cuánto vale el conmutador $[\Pi_x, \Pi_y]$ en este caso? Muestre que redefiniendo los operadores Π_x y Π_y multiplicándolos por una constante apropiada, se obtiene la relación de conmutación canónica.

(f) Concluya entonces que los autovalores del Hamiltoniano del electrón en el campo magnético uniforme son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{|eB|\hbar}{mc}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{R}$. Interprete.

III. Campo electromagnético cuantizado

P11 **Cuadraturas del campo EM.** Considere la expresión del campo eléctrico cuantizado en términos de los operadores a, $a^\dagger$ y defina los dos operadores

$$Q := \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad P := \frac{a - a^\dagger}{i\sqrt{2}}.$$

(a) Muestre que Q y P son operadores hermíticos.

(b) ¿Calcule $[Q, P]$. Qué reglas de conmutación satisfacen?

(c) Escriba el operador campo eléctrico en términos de los operadores Q y P. Interprete.

P12 **Estados de n fotones y estados coherentes del campo EM.** Considere un único modo del campo electromagnético.

(a) Sea $|n\rangle$ el estado con n fotones en este modo. Calcule el valor medio en función del tiempo $\langle n|E|n\rangle\,(t)$ del campo eléctrico en este estado. ¿Obtiene lo que hubiese esperado? Calcule además la varianza de E en función del tiempo. Interprete.

(b) Sea $|\alpha\rangle$ un estado coherente de este modo. Calcule el valor medio en función del tiempo $\langle\alpha|E|\alpha\rangle\,(t)$ del campo en este estado, escribiendo explícitamente $\alpha = |\alpha|\,e^{i\phi}$. Interprete el resultado. ¿Qué es un estado coherente del campo? Calcule además la varianza de E en función del tiempo. Interprete. Finalmente, calcule la probabilidad de obtener n fotones en un estado coherente, ¿qué distribución obtiene?

P13 **Luz incoherente.** La luz emitida por un láser está bien descripta (en muy buena medida) por un estado coherente del oscilador $|\alpha\rangle$. Consideremos ahora, en cambio, una fuente de luz incoherente, como puede ser la luz emitida por el sol, o por cualquier lámpara común y corriente. Para hacer la cuenta más sencilla, suponderemos un único modo de la fuente de luz (el caso más general se sigue haciendo lo mismo para cada modo). Una fuente de luz incoherente de este tipo emite trenes de paquetes de ondas que son cada uno un estado coherente $|\alpha_i\rangle$, y tales que los paquetes emitidos a distintos tiempos tienen aproximadamente la misma amplitud, $|\alpha_i| \approx |\alpha|$ constante, pero la fase $\mathrm{Arg}(\alpha_i)$ varía aleatoriamente de forma uniforme. Por lo tanto, la luz de este tipo será descripta, no por un estado puro, sino que por una matriz densidad

$$\rho_{\text{incoh}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \big||\alpha|\,e^{i\phi}\big\rangle\!\big\langle|\alpha|\,e^{i\phi}\big|\,.$$

(a) ¿Por qué tenemos un factor $(2\pi)^{-1}$ multiplicando esta integral? ¿Cómo puede interpretar esta expresión en términos de mezclas estadísticas de estados puros?

(b) Calcule la forma explícita para ρ_{incoh} en la base número.
Ayuda: Recuerde que para $n, m \in \mathbb{Z}$, vale $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, e^{i\varphi(n-m)} = 2\pi\delta_{nm}$.

(c) ¿Qué forma tiene este estado en la base número? Calcule la probabilidad $P(n)$ de medir un número de fotones n. ¿Qué distribución obtiene? Diga además cuál es el número medio de fotones y la varianza (use que la distribución obtenida es conocida).