Física Teórica 2

Primer Cuatrimestre 2021

Guía 7: Momento Angular y Rotaciones

I. Momento Angular

P1 Suponga que un sistema se encuentra en un autoestado de J_z con autovalor $\hbar m$.

(a) Muestre que los valores medios tanto de J_x como J_y son cero, i.e. $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$, de dos formas diferentes: (i) usando el principio de incertidumbre, y (ii) usando la expansión de J_x y J_y en términos de J_+ y J_-.

(b) Muestre que si se mide la projección de momento angular en la sobre una dirección $\hat{\boldsymbol{n}}$ que forma un ángulo θ con el eje $\hat{\boldsymbol{z}}$, entonces $\langle \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \rangle = \hbar m \cos\theta$.

P2 Considere un sistema de spin 1/2 (es decir $j = 1/2$).

(a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y bajada, la representación matricial de los operadores S^2, S_x, S_y y S_z en la base de autoestados de S_z. Muestre que se obtiene que los operadores de spin están dados por $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, donde σ_i son las matrices de Pauli.

(b) Usando resultados anteriores, muestre que el operador rotación para un sistema de spin 1/2 se puede escribir como

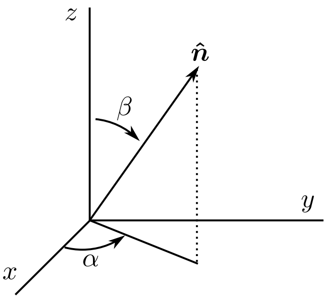
$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi) = \exp\left(-i\,\frac{\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\phi}{\hbar}\right) = \mathbb{I}\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad.

(c) Escriba explícitamente la matriz de 2×2 que representa la rotación $\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi)$ en la base

$$\left\{ |+\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2} \right\rangle, |-\rangle \equiv \left| j = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2} \right\rangle \right\}.$$

(d) Sea $\hat{\boldsymbol{n}}$ el versor definido por los ángulos polares α y β según se muestra en la figura. Aplique al ket $|+\rangle$ el operador de rotación adecuado† para obtener el estado $|\boldsymbol{S}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}, +\rangle$, que representa un spin orientado según $\hat{\boldsymbol{n}}$. Compare el resultado con el obtenido en el Problema 10 de la Guía 1.



† Pruebe a hacer la cuenta de dos formas diferentes: (i) aplicando una única rotación en un ángulo y dirección adecuados, y (ii) descomponiendo la rotación en rotaciones elementales utilizando los ángulos de Euler.

(e) Muestre que para una rotación en $\phi = 2\pi$ se satisface

$$\mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, \phi = 2\pi) = -\mathbb{I},$$

y, por lo tanto, ante una rotación en 2π el estado del sistema cambia según

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{n}},2\pi)]{} \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{n}}, 2\pi)\,|\psi\rangle = -\,|\psi\rangle\,.$$

Observe que no se obtiene el mismo vector debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pág. 24.

P3 Considere un estado arbitrario $|\psi\rangle$ de un sistema de spin 1/2, sobre el que se aplica una rotación en un ángulo φ alrededor del eje $\hat{\boldsymbol{z}}$, es decir

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = \mathcal{D}^{(1/2)}(\hat{\boldsymbol{z}},\varphi)\,|\psi\rangle = \exp\left(-i\,\frac{S_z\varphi}{\hbar}\right)|\psi\rangle\,.$$

Calcule los valores medios $\langle\psi'|S_x|\psi'\rangle$, $\langle\psi'|S_y|\psi'\rangle$ y $\langle\psi'|S_z|\psi'\rangle$ en el sistema rotado, en función de los valores de expectación $\langle\psi|S_x|\psi\rangle$, $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$ y $\langle\psi|S_z|\psi\rangle$ en el sistema original.

P4 Considere la secuencia de rotaciones de Euler de un sistema de spin 1/2 representada por

$$\mathcal{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}},\alpha)\ \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{y}},\beta)\ \mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{z}},\gamma).$$

(a) Muestre que la matriz de 2×2 que representa esta rotación es

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) &= \exp\left(-i\frac{\sigma_z\alpha}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_y\beta}{2}\right)\exp\left(-i\frac{\sigma_z\gamma}{2}\right)\\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2}\\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Debido a las propiedades del grupo de las rotaciones, esperamos que esta secuencia de operaciones sea equivalente a una única rotación alrededor de algún eje con ángulo θ. Encuentre θ y la dirección de dicho eje.

P5 Considere un sistema con momento angular 1 (es decir, $j=1$).

(a) Construya, por aplicación de los operadores de subida y de bajada, la representan matricial de los operadores J^2, J_x, J_y, y J_z en la base $\{|j=1,m=1\rangle\,,|j=1,m=0\rangle\,,|j=1,m=-1\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_z. Verifique explícitamente multiplicando las matrices la relación $[J_x,J_y] = i\hbar J_z$.

(b) Encuentre la base $\{|j=1,m_y\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_y, como combinación lineal de los $\{|j=1,m\rangle\}$.

(c) Evalúe $J_z(J_z+\hbar)(J_z-\hbar)$ y $J_y(J_y+\hbar)(J_y-\hbar)$ sin usar la representación matricial.

(d) Muestre que en el caso de momento angular $j=1$, vale que

$$\mathcal{D}^{(1)}(\hat{\boldsymbol{y}},\beta) = e^{-iJ_y\beta/\hbar} = 1 - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\sin\beta - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2(1-\cos\beta)\,.$$

Usando esto obtenga

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta) & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta)\\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \cos\beta & -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta\\ \left(\frac{1}{2}\right)(1-\cos\beta) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta & \left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos\beta)\end{pmatrix},$$

donde $d(\beta)$ es la representación matricial de $\mathcal{D}(\hat{\boldsymbol{y}},\beta)$ en la base de autoestados de J_z.

P6 Considere un sistema con $j=1$ que se encuentra en el estado $|\psi\rangle$ dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|j=1,m=1\rangle - |j=1,m=-1\rangle\right).$$

(a) Si se mide L_x sobre $|\psi\rangle$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades? Repita el cálculo si se mide L_y.

(b) Suponga que sobre el estado $|\psi\rangle$ se mide L_z y se obtiene $\hbar$, e inmediatamente después se mide L_y. ¿Qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

II. Momento Angular Orbital

P7 Construya los armónicos esféricos Y_1^m. Para ello, resuelva primero $L_+Y_1^1 = 0$ (usando L_+ en la representación r) y luego aplique el operador L_- a Y_1^1 (previamente normalizado) para hallar los otros dos restantes. Usando los resultados de **P5**, escriba la combinación lineal de los armónicos esféricos $\{Y_1^m\}$ que es autoestado de L_y con autovalor $\hbar$. Verifique su resultado aplicándole L_y en la representación r.

P8 Suponga que fuera posible un valor semi-entero de l para el impulso angular orbital, por ejemplo $l = 1/2$. A partir de

$$L_+ \, Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) = 0,$$

podemos deducir

$$Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi) \propto e^{i\phi/2}\sqrt{\sin\theta}.$$

Verifique esta afirmación. Intente construir entonces $Y_{1/2}^{-1/2}(\theta,\phi)$ de dos maneras diferentes,

(a) aplicando L_- a $Y_{1/2}^{1/2}(\theta,\phi)$,

(b) usando que $L_-Y_{1/2}^{-1/2}(\theta,\phi) = 0$.

Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios (esto da un argumento en contra de valores semi-enteros de l).

P9 Considere un autoestado de impulso angular orbital $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponga que este estado es rotado en un ángulo β alrededor del eje $\hat{\boldsymbol{y}}$. Encuentre la probabilidad de medir $m = 0$, ± 1, y ± 2 en el nuevo estado.

P10 La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por

$$\Psi(x,y,z) = (x + y + 3z)f(r),$$

con $f(r)$ alguna función de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) ¿Es Ψ autofunción de L^2? Si es así, ¿cuál es el valor de l? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?

(c) Suponga que se sabe de alguna manera que $\Psi(x,y,z)$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

P11 Considere el Hamiltoniano de un rotor rígido,

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3}\right),$$

donde $\boldsymbol{L}$ es el impulso angular en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. A partir de esta expresión obtenga la ecuación de movimiento de Heisenberg para $\boldsymbol{L}$ y luego halle las ecuaciones de movimiento de Euler en el límite correspondiente.

III. Suma de Momento Angular

P12 Considere una partícula de spin ½ en un estado con momento angular orbital $l = 1$.

(a) Encuentre el estado con j_{max} y $m_{j_{max}}$ en términos de los estados $|l, s, m_l, m_s\rangle$.

(b) Use $J_- = L_- + S_-$ para generar todos los estados $|j_{max}, m\rangle$.

(c) Use ortonormalidad para encontrar el estado $|j_{max} - 1, j_{max} - 1\rangle$.

(d) Use J_- para generar todos los estados $|j_{max} - 1, m\rangle$.

(e) ¿Cuál es el valor de expectación de L_z en el estado con $j = 1/2$ y $m = 1/2$? ¿Cuál es el valor de expectación de S_z en ese estado?

P13 Considere dos partículas con spin ½. Calcule todos los coeficientes de Clebsch-Gordan por dos caminos diferentes:

(a) Escriba los autoestados de spin total S^2 y S_z, $\{|s,m\rangle\}$, en función de los autoestados de S_1z, S_2z, $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$, usando los operadores $S_\pm$ y ortogonalidad (es decir, usando el mismo procedimiento del problema **P12**).

(b) Escriba las matrices de 4×4 que corresponden a la representación de los operadores

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2, \qquad S_z = S_{1z} + S_{2z},$$

en la base $\{|s_1 = 1/2, s_2 = 1/2, m_1, m_2\rangle\}$. Luego encuentre la matriz unitaria que diagonaliza estas matrices. ¿Qué son los coeficientes del cambio de base?

P14 El acoplamiento spin-órbita es un efecto relativista que introduce, a bajas energías, una interacción efectiva entre el spin y el momento angular orbital de una partícula. De esta forma, incluyendo el acoplamiento spin-órbita, el Hamiltoniano electrónico para el átomo de Hidrógeno sin campos externos es

$$H = H_0 + \frac{2\mu_B^2}{r^3}\frac{\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}}{\hbar^2}, \qquad \text{con } H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r},$$

y donde $\boldsymbol{S}$ representa el spin del electrón.

(a) Evalúe los conmutadores

$$\left[H, L^2\right], \left[H, S^2\right], \left[H, J^2\right], \left[H, L_z\right], \left[H, S_z\right], \left[H, J_z\right],$$

donde $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$. ¿Cuál es el conjunto más grande de estos operadores (incluyendo H) que conmutan mutuamente?

Ayuda: recuerde que en coordenadas polares el operador p^2 se escribe como

$$\boldsymbol{p}^2 = -\hbar^2 \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r}{\partial^2} r + \frac{1}{r^2}\boldsymbol{L}^2.$$

(b) Considere ahora que se enciende un campo magnético externo $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, de modo que al Hamiltoniano se le agrega el término

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar} B\left(L_z + 2S_z\right).$$

Para este caso, repita el inciso (a).

IV. Operadores Vectoriales, Tensores Esféricos y Teorema de Wigner–Eckart

P15 Sean $\{V_x, V_y, V_z\}$ tres operadores. Decimos que V_i son las componentes de un *operador vectorial* si ante rotaciones V_i se transforma de la forma

$$\mathcal{D}^\dagger(R)\, V_i\, \mathcal{D}(R) = \sum_j R_{ij} V_j,$$

donde R es la matriz que define la rotación en $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{D}(R)$ el operador de rotación asociado en el espacio de Hilbert. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$[L_j, V_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl} V_l.$$

(a) Verifique que el operador posición $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ es un operador vectorial.

(b) Verifique que el operador momento $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ es un operador vectorial.

(c) Verifique que el operador de momento angular orbital $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$ es un operador vectorial.

P16 Sean $\{T^{(k)}_{-k}, T^{(k)}_{-k+1}, \ldots, T^{(k)}_{k-1}, T^{(k)}_{k}\}$ $2k+1$ operadores. Decimos que $T^{(k)}_q$ son las componentes de un *tensor esférico irreducible* de rango k si ante rotaciones $T^{(k)}_q$ se transforma de la forma

$$\mathcal{D}(R)\, T^{(k)}_q\, \mathcal{D}^{\dagger}(R) = \sum_{q'} \mathcal{D}^{(k)}_{q'q}(R)\, T^{(k)}_{q'},$$

donde $\mathcal{D}^{(k)}_{q'q}$ son los elementos de matriz del operador de rotación en el subespacio de momento angular k, es decir $\langle kq'|\mathcal{D}(R)|kq\rangle$. Se puede mostrar que esto es equivalente a

$$\left[J_z, T^{(k)}_q\right] = \hbar q T^{(k)}_q, \qquad \left[J_{\pm}, T^{(k)}_q\right] = \hbar\sqrt{k(k+1) - q(q\pm 1)}\, T^{(k)}_{q\pm 1}.$$

(a) Verifique que si $\boldsymbol{V}$ es un operador vectorial, entonces los operadores $V^{(1)}_q$ dados por

$$V^{(1)}_{\pm 1} =: \mp\frac{V_x \pm iV_y}{\sqrt{2}}, \quad V_0 =: V_z,$$

definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(b) Sea $\boldsymbol{V}$ un operador vectorial. Considere los armónicos esféricos $Y^m_{l=1}(x,y,z)$ en coordenadas cartesianas y sean $V^{(1)}_q$, $q = -1, 0, 1$, operadores definidos de la forma

$$V^{(1)}_q = rY^q_1\left(V_x, V_y, V_z\right),$$

(es decir que en la fórmula de los armónicos esféricos sustituimos las variables x_i por los respectivos operadores V_i). Verifique entonces que los operadores $V^{(1)}_q$ definen un tensor esférico irreducible de rango 1.

(c) Suponiendo que las componentes de $\boldsymbol{V}$ conmutan entre sí y haciendo uso del hecho que los armónicos esféricos ante rotaciones se transforman de la forma

$$Y^m_l \xrightarrow[R]{} \left(Y^m_l\right)' = \sum_{m'} \mathcal{D}^{(l)}_{m'm}(R)\, Y^{m'}_l,$$

discuta por qué la sustitución $V^{(k)}_q = r^k Y^q_k(V_x, V_y, V_z)$ en los armónicos esféricos escritos en coordenadas cartesianas nos define un tensor esférico irreducible de rango k.

P17 Sean $V^{(k_1)}$ y $W^{(k_2)}$ dos tensores esféricos irreducibles de rango k_1 y k_2, respectivamente.

(a) Muestre entonces que los operadores $T^{(k)}_q$, dados por

$$T^{(k)}_q = \sum_{q_1, q_2} V^{(k_1)}_{q_1} W^{(k_2)}_{q_2} \langle k_1 k_2; q_1 q_2 | kq\rangle,$$

forman un tensor esférico irreducible de rango k. Para ello, estudie cómo transforma $T^{(k)}$ ante rotaciones.

(b) A partir de la expresión del inciso anterior, concluya que el producto $V_i W_j$ de las componentes de dos operadores vectoriales $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ se puede escribir como la suma de un escalar, otro vector y un tensor esférico de rango 2.

(c) Sean $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{W}$ dos operadores vectoriales. Construya, a partir de estos dos operadores y utilizando el inciso (a), tensores esféricos irreducibles de rango 0, rango 1 y rango 2 expresados en términos de los productos de las componentes V_i y W_j. En particular, si $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} = \boldsymbol{R}$ es el operador posición, muestre que el tensor de rango 2 que se obtiene es, a menos de un factor, el operador momento cuadrupolar eléctrico.

P18 Considere una partícula sin spin ligada a un centro fijo mediante de un potencial central. Estudie los elementos de matriz

$$\left\langle n', l', m' \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy) \middle| n, l, m\right\rangle \quad \text{y} \quad \langle n', l', m'|z|n, l, m\rangle,$$

utilizando únicamente el teorema de Wigner-Eckart. En particular, trate de relacionar los distintos elementos de matriz entre sí y establezca cuáles de ellos pueden ser no nulos.

P19 El tensor cuadrupolar eléctrico de una partícula de carga q se define como

$$Q_{ik} := q\left(3x_i x_k - \delta_{ik} r^2\right).$$

Suponga que se conoce el valor de expectación de la componente zz del momento cuadrupolar en el autoestado de momento angular $|\alpha, j, m = j\rangle$ (donde α es un índice asociado a la dependencia radial del estado; recordar que L^2 y L_z no forman un CCOC). Notemos con Q este valor de expectación, es decir que

$$Q := \langle \alpha, j, m = j | Q_{zz} | \alpha, j, m = j\rangle = q\left\langle \alpha, j, m = j \middle| \left(3z^2 - r^2\right) \middle| \alpha, j, m = j\right\rangle.$$

(a) Calcule los elementos de matriz

$$q\left\langle \alpha, j, m' \middle| \left(x^2 - y^2\right) \middle| \alpha, j, m = j\right\rangle, \qquad m' = j, j-1, \ldots, -j+1, -j.$$

en función de Q y de los coeficientes de Clebsch-Gordan. Para ello,

(i) Escriba xy, xz, y $(x^2 - y^2)$ como componentes de un tensor esférico irreducible de rango 2.

(ii) Evalúe los elementos de matriz buscados utilizando el teorema de Wigner-Eckart.

(b) Evalúe los valores de expectación de todas las componentes del tensor cuadrupolar sobre los estados $|\alpha, j, m = j\rangle$, es decir calcule

$$\langle \alpha, j, m = j | Q_{ik} | \alpha, j, m = j\rangle,$$

en función del valor de expectación Q. Interprete el resultado.

(c) Probar que para un núcleo atómico de spin 0 o 1/2 los valores de expectación del momento cuadrupolar eléctrico son nulos (el spin de un núcleo es el momento angular resultante de los spins y momentos angulares relativos de los nucleones constituyentes).