Física Teórica 2

Guía 7: Momento Angular y Rotaciones. Momento Angular Orbital

Problema 10

Mateo Koifman

1 de junio de 2021

Problema 13

P10 La función de onda de una partícula sujeta a un potencial esféricamente simétrico $V(r)$ está dada por

$$\Psi(x,y,z) = (x+y+3z)f(r),$$

con $f(r)$ alguna función de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(a) ¿Es Ψ autofunción de L^2? Si es así, ¿cuál es el valor de l? Si no es así, ¿cuáles son los posibles valores de l que pueden ser obtenidos cuando se mide L^2?

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?

(c) Suponga que se sabe de alguna manera que $\Psi(x,y,z)$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

$$\Psi(\vec{r}) = (x + y + 3z)f(r)$$
$$\Psi(\vec{r}) = (\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 3\cos\theta) r f(r)$$

(a) ¿Es Ψ autofunción de L^2? Si es así, ¿cuál es el valor de l?
Una forma directa es verificar si se cumple

$$L^2 |\Psi\rangle = l(l+1)\hbar^2 |\Psi\rangle$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{r} | L^2 | \Psi \right\rangle &= -\hbar^2 \left(\partial_\theta^2 + \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 \right) \Big(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 3\cos\theta \Big) r f(r) \\
&= 2\hbar^2 \Big(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 3\cos\theta \Big) r f(r)
\end{aligned}$$

Por lo que identificamos $l = 1$.
Y qué sucede con L_z?

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r} | L_z | \Psi \rangle &= -i\hbar\partial_\phi (\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 3\cos\theta) r f(r) \\
&= -i\hbar(-\sin\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi) r f(r) \\
\langle \mathbf{r} | L_z | \Psi \rangle &\neq m\hbar \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle
\end{aligned}$$

No existe un único valor de m al medir L_z.

$$\Psi(\vec{r}) = (x + y + 3z)f(r)$$
$$\Psi(\vec{r}) = (\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 3\cos\theta)rf(r)$$

Otra forma para encontrar los posibles valores de L^2 y L_z es reescribir $\Psi(\vec{r})$ en términos de $Y_l^m(\theta, \phi)$

$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot e^{-i\varphi} \cdot \sin\theta \quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \frac{(x-iy)}{r}$$
$$Y_1^{0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \cos\theta \quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{z}{r}$$
$$Y_1^{1}(\theta,\varphi) = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot e^{i\varphi} \cdot \sin\theta \quad = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \frac{(x+iy)}{r}$$

$$\Psi(\vec{r}) = \left[(1+i)Y_1^{-1}(\theta,\phi) - (1-i)Y_1^1(\theta,\phi) + 6Y_1^0(\theta,\phi)\right]\sqrt{\frac{2\pi}{3}}rf(r)$$
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{40}}\left[(1+i)\,|1,-1\rangle - (1-i)\,|1,1\rangle + 6\,|1,0\rangle\right] \otimes |R\rangle$$

con $\langle r|R\rangle = \sqrt{40}\sqrt{\frac{2\pi}{3}}rf(r)$ y usando $\langle \mathbf{r}|l,m\rangle = Y_l^m(\theta,\phi)$.

Podemos ver fácilmente que $l = 1$ y que $m \in \{-1, 0, 1\}$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{40}}\Big[(1+i)\,|1,-1\rangle - (1-i)\,|1,1\rangle + 6\,|1,0\rangle\Big] \otimes |R\rangle \equiv |\psi\rangle \otimes |R\rangle$$

(b) ¿Cuáles son las probabilidades de hallar a la partícula en los distintos estados con m definido?

Tenemos que calcular las proyecciones $\langle l, m|\psi\rangle$

$$P(m=-1) = \big|\,\langle 1,-1|\psi\rangle\,\big|^2 = \frac{2}{40}$$
$$P(m=1) = \big|\,\langle 1,1|\psi\rangle\,\big|^2 = \frac{2}{40}$$
$$P(m=0) = \big|\,\langle 1,0|\psi\rangle\,\big|^2 = \frac{36}{40}$$

(c) Suponga que se sabe de alguna manera que $\Psi(\vec{r})$ es una autofunción de energía con autovalor E. Indique cómo puede hallarse $V(r)$.

Recordemos que $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V$, con

$$\mathbf{p}^2 = \hbar^2 \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 \right)$$

$$\langle \mathbf{r} | H | \Psi \rangle = E \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{1}{\hbar^2 r^2} L^2 \right) + V(r) \right] \psi(\theta, \phi) r f(r) = E \psi(\theta, \phi) r f(r)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{2}{r^2} \right) + V(r) \right] \psi(\theta, \phi) r f(r) = E \psi(\theta, \phi) r f(r)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{2}{r^2} \right) + V(r) \right] r f(r) = E r f(r)$$

$$V(r) = \frac{\left[E + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{2}{r^2} \right) \right] r f(r)}{r f(r)}$$