# Guía 8:

$\boxed{P2}$ Generación de estados coherentes en la cavidad.

Acoplamiento de la cavidad con ondas electromagnéticas clásicas de frecuencia $\omega_p$.

$$H_p = -\vec{A}\cdot\vec{J}(t) = 2\hbar\Omega(a+a^\dagger)\cos\omega_p t$$

$$H_0 = \hbar\omega_c a^\dagger a \quad (\text{monomodo})$$

En el cuadro de interacción:

$$H_{p_I} = U_0^\dagger(t) H_p U_0(t)$$

$$H_{p,I} = 2\hbar\Omega(a e^{-i\omega_c t} + a^\dagger e^{i\omega_c t}) \frac{1}{2}(e^{i\omega_p t} + e^{-i\omega_p t})$$

$$H_{p,I} \simeq \hbar\Omega(a e^{i(\omega_p-\omega_c)t} + a^\dagger e^{-i(\omega_p-\omega_c)t})$$

donde se desprecian términos que oscilan con alta frecuencia.

Volviendo a la representación de Schrödinger:

$$H_p \simeq \hbar\Omega(a e^{i\omega_p t} + a^\dagger e^{-i\omega_p t})$$

$$H \simeq \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\Omega(a e^{i\omega_p t} + a^\dagger e^{-i\omega_p t})$$

Usando ahora la representación de Heisenberg.

$$\dot{a}(t) = \frac{[a,H]}{i\hbar} = \frac{\hbar\omega_c}{i\hbar}\Big(\underbrace{[a,a^\dagger]}_{1}a + \underbrace{a^\dagger[a,a]}_{0}\Big)$$

$$+ \frac{\hbar\Omega}{i\hbar}\underbrace{[a,a^\dagger]}_{1}e^{-i\omega_p t}$$

$$\dot{a}(t) = -i\omega_c a - i\Omega e^{-i\omega_p t} \qquad (*)$$

Solución propuesta:

$$a(t) = c\, e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c} e^{-i\omega_p t}$$

$$a(0) = a \quad \Rightarrow \quad c = a - \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}$$

$$\therefore \; a(t) = \left(a - \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}\right)e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c} e^{-i\omega_p t}$$

Si $\omega_p - \omega_c = \delta$ ?

$$a(t) = a e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}\left(e^{-i(\omega_c+\delta)t} - e^{-i\omega_c t}\right)$$

$$= a e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\cancel{\delta}}\left(\cancel{1} - i\cancel{\delta} t - \cancel{1}\right)e^{-i\omega_c t}$$

$$a(t) = (a - i\Omega t)\, e^{-i\omega_c t}$$

$$* \quad a(t) = \underbrace{a_h(t)}_{c\,e^{-i\omega_c t}} + \underbrace{a_p}_{e^{-i\omega_c t}g(t)}$$

$$\cancel{-i\omega_c a(t)} + e^{-i\omega_c t}\dot{g}(t) = \cancel{-i\omega_c a(t)} - i\Omega e^{-i\omega_p t}$$

Guía 8

Conti. $\boxed{P2}$ estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$
coherente.

$$a(t)\,|\Psi_0\rangle = \left[a\,e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}\right)\right] |\alpha_0\rangle$$

$$U^{+}(t)\,a\,U(t)\,|\Psi_0\rangle = \left[\alpha_0 e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}\right)\right] |\alpha_0\rangle$$

$$a\big(\underbrace{U(t)|\Psi_0\rangle}_{|\Psi(t)\rangle}\big) = \left[\alpha_0 e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}\right)\right] \underbrace{\big(U(t)|\alpha_0\rangle\big)}_{|\Psi(t)\rangle}$$

$\therefore$ $|\Psi(t)\rangle$ es autoestado del operador de destrucción.

Con autovalor:

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\omega_p-\omega_c}\left(e^{-i\omega_p t} - e^{-i\omega_c t}\right)$$

$\therefore$ $\boxed{|\Psi(t)\rangle = |\alpha(t)\rangle}$

- $\omega_p - \omega_c = \Delta$ ; $\Delta \to 0$ :

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega_c t} + \frac{\Omega}{\Delta} e^{-i\omega_c t} \underbrace{\left(e^{-i\Delta t} - 1\right)}_{-i\Delta t}$$

$$\alpha(t) \simeq e^{-i\omega_c t}\left(\alpha_0 - i\Omega t\right)$$

Crece linealmente con el tiempo su energía. Hay una resonancia, se absorbe energía del campo.

(b) $\langle n\rangle = \langle \alpha(t)| a^{+} a |\alpha(t)\rangle$

$\langle n\rangle = |\alpha(t)|^2$

$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

$\text{Prob}(0) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$

Para el caso resonante $\langle n\rangle \simeq \Delta^2 t^2$ para $t$ largos.

$$\text{Prob}(0) \simeq e^{-\frac{\Delta^2 t^2}{2}} \to 0$$

El valor medio del número de fotones crece con el tiempo, la probabilidad máxima se desplaza a $n$ grandes con el tiempo.

(c) Hiciamos $\alpha_0 \neq 0$, los puntos anteriores requieren establecer $\alpha_0 = 0$ (vacío).