Guía 8: Electrodinámica Cuántica de Cavidades (CQED)

$\boxed{P6}$ Interacción de un átomo con el campo de una cavidad.

(a) $|\psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes |\phi\rangle \quad , |\phi\rangle = \sum_{n=0} c_n |n\rangle$

$\therefore \quad |\psi(0)\rangle = \sum_{n=0} c_n |e,n\rangle = \sum_{n=1} c_{n-1} |e,n-1\rangle$

$\Delta = 0$ Resonante

$$\Rightarrow U_n(t) = e^{-in\omega_c t}\left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)\mathbb{I} - i\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)\sigma_y\right]$$

en el subespacio $\{|e,n-1\rangle, |g,n\rangle\}$

$$\Omega_n = \Omega\sqrt{n}$$

Necesitamos:

$$U_n(t)|e,n-1\rangle = e^{-in\omega_c t}\left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)|e,n-1\rangle + \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)|g,n\rangle\right]$$

$\therefore \quad |\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle = \sum_{n=1} c_{n-1} U_n(t)|e,n-1\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=1} c_{n-1} e^{-in\omega_c t}\left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)|e,n-1\rangle + \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)|g,n\rangle\right]$$

$$\text{Prob}(|e\rangle \,|\, |\psi(t)\rangle) = \langle\psi(t)|\underbrace{|e\rangle\langle e|\otimes\mathbb{I}}_{\Pi_{|e\rangle}}|\psi(t)\rangle$$

$$\text{Prob}(|e\rangle, |\psi(t)\rangle) = \left|\, |e\rangle\langle e|\otimes\mathbb{I}\,|\psi(t)\rangle\right|^2$$

$$\mathrm{Prob}(|e\rangle, |\Psi(t)\rangle) = \left| \sum_{n=1} C_{n-1} e^{-in\omega_c t} \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |e, n-1\rangle \right|^2$$

$$P_e(t) = \sum_{n=1} |C_{n-1}|^2 \underbrace{\cos^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)}_{\frac{1+\cos(\Omega_n t)}{2}}$$

$$\boxed{P_e(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=0} P_n \cos(\sqrt{n+1}\,\Omega t)\right]}$$

Con $P_n = |C_n|^2$, probabilidad de que en la cavidad hay n fotones en el estado inicial.

$$\Rightarrow P_g(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{n=0} P_n \cos(\sqrt{n+1}\,\Omega t)\right]$$

Una forma de calcular P_n es haciendo la transformada de Fourier de $P_e(t)$, y esta tiene picos proporcionales a P_n.

1b) Si $|\phi\rangle = |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

$$\Rightarrow C_n = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \alpha^2}{\sqrt{n!}} \quad \therefore \quad |C_n|^2 = P_n = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}$$

sabemos que $\langle n\rangle = |\alpha|^2$

Para $|\alpha|$ grande tiende a una normal:

$$\mathcal{N} e^{-\frac{(n-|\alpha|^2)^2}{|\alpha|}}, \text{ máximo en } n = |\alpha|^2$$

Cerca de $n = \langle n\rangle$ varias contribuciones contribuyen con casi la misma frecuencia

$$P_e \simeq \frac{1}{2}\left(1 + P_{\langle n\rangle} \cos\sqrt{\langle n\rangle + 1}\,\Omega t\right)$$

Si $\sqrt{\langle n\rangle}\,\Omega \tau = 2\pi \Rightarrow \tau_{osc} \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{n}\,\Omega}$