Física Teórica 2

Guía 8: Electrodinámica cuántica en cavidades (CQED)

Problema 7

Mateo Koifman

15 de junio de 2021

Problema 7

P7 **Evolución del momento dipolar atómico**. Considere el momento dipolar del átomo, que está dado por el operador $d = d_0(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)$ (con d un número real con unidades de momento dipolar cuyo valor depende del átomo y niveles $|e\rangle$, $|g\rangle$ particulares). Calcule el valor medio del momento dipolar del átomo en función del tiempo si inicialmente el átomo se encuentra en el estado excitado en las siguientes situaciones

(a) La cavidad inicialmente tiene n fotones.

(b) La cavidad inicialmente se encuentra en un estado coherente $|\alpha\rangle$ y además estamos en la condición de resonancia ($\Delta = 0$).

Compare los resultados obtenidos en este problema y en los problemas anteriores sobre la probabilidad de encontrar el átomo excitado con los resultados análogos del problema de Rabi, donde el campo se trata clásicamente. ¿Cómo se comparan las probabilidades de decaer del átomo en las distintas situaciones? Por otro lado, ¿cómo cambian los valores medios del momento dipolar entre los distintos modelos y estados de la cavidad?

La clase pasada diagonalizamos el Hamiltoniano de Jaynes–Cummings (P3)

$$H = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & H_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & H_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

donde H_n actúa sobre el subespacio de estados con n excitaciones $\{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$.

Al diagonalizar cada bloque H_n, encontramos que las autoenergías son

$$E_n^{\pm} = \hbar\omega_c n \pm \hbar\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Omega^2}{4} n}$$

y los autoestados

$$\begin{aligned} \left|n^+\right\rangle &= \cos\theta_n \left|e, n-1\right\rangle + i\sin\theta_n \left|g, n\right\rangle \\ \left|n^-\right\rangle &= \sin\theta_n \left|e, n-1\right\rangle - i\cos\theta_n \left|g, n\right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|e, n-1\right\rangle &= \cos\theta_n \left|n^+\right\rangle + \sin\theta_n \left|n^-\right\rangle \\ \left|g, n\right\rangle &= -i\sin\theta_n \left|n^+\right\rangle + i\cos\theta_n \left|n^-\right\rangle \end{aligned}$$

con

$$\tan\theta_n = \frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2 n} - \Delta}{\Omega\sqrt{n}}$$

P7 Calcule el valor medio del momento dipolar del átomo en función del tiempo

$$\langle d(t)\rangle = \langle \psi_n(t)|d|\psi_n(t)\rangle$$

con

$$d = d_0\Big(|e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e| \Big)$$

y, en el caso del inciso (a),

$$|\psi_n(0)\rangle = |e, n\rangle$$

La evolución temporal va a estar dada por el bloque del Hamiltoniano H_{n+1} correspondiente a $n+1$ excitaciones

Nos gustaría escribir $|\psi_n(0)\rangle$ en la base de autoestados de H_{n+1} $\{\left|n+1^+\right\rangle, \left|n+1^-\right\rangle\}$ para calcular fácilmente su evolución temporal, y luego volver a escribir $|\psi_n(t)\rangle$ en la base $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$ para calcular el valor medio de d.

Cavidad con n fotones

$$|\psi_n(0)\rangle = |e, n\rangle = \cos\theta_{n+1}\left|n+1^+\right\rangle + \sin\theta_{n+1}\left|n+1^-\right\rangle$$

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi_n(0)\rangle = e^{-iE^+_{n+1}t/\hbar}\cos\theta_{n+1}\left|n+1^+\right\rangle + e^{-iE^-_{n+1}t/\hbar}\sin\theta_{n+1}\left|n+1^-\right\rangle$$

Volviendo a la base $\{|e, n\rangle, |g, n+1\rangle\}$

$$\begin{aligned}
|\psi_n(t)\rangle = &\left(e^{-iE^+_{n+1}t/\hbar}\cos^2\theta_{n+1} + e^{-iE^-_{n+1}t/\hbar}\sin^2\theta_{n+1}\right)|e, n\rangle + \\
&+ i\left(e^{-iE^+_{n+1}t/\hbar}\sin\theta_{n+1}\cos\theta_{n+1} - e^{-iE^-_{n+1}t/\hbar}\sin\theta_{n+1}\cos\theta_{n+1}\right)|g, n+1\rangle \\
&\equiv e(t)|e, n\rangle + g(t)|g, n+1\rangle
\end{aligned}$$

El valor medio del momento dipolar es

$$\begin{aligned}
\langle d(t)\rangle &= d_0\Big(e^*(t)\langle e, n| + g^*(t)\langle g, n+1|\Big)\Big(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|\Big)\Big(e(t)|e, n\rangle + g(t)|g, n+1\rangle\Big) \\
&= d_0\Big(e^*(t)\langle e, n| + g^*(t)\langle g, n+1|\Big)\Big(e(t)|g, n\rangle + g(t)|e, n+1\rangle\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Cavidad en un estado coherente y resonante

(b) Consideremos ahora que la cavidad inicialmente se encuentra en un estado coherente $|\alpha\rangle$ y además estamos en la condición de resonancia

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes |\alpha\rangle$$

con

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$|\Psi(0)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |e\rangle \otimes |n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n(0)\rangle$$

Para calcular la evolución temporal podemos usar lo que sabemos del ejercicio anterior

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)\,|\Psi(0)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} U(t)\,|\psi_n(0)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n(t)\rangle$$

Cavidad en un estado coherente y resonante

Además notemos las simplificaciones del caso resonante ($\Delta = 0$)

$$\tan\theta_n = \frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2 n} - \Delta}{\Omega\sqrt{n}} \;\rightarrow\; \tan\theta_n = 1 \qquad \text{cuando } \Delta = 0$$

$$\tan\theta_n = 1 \;\rightarrow\; \cos\theta_n = \sin\theta_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A partir de los cálculos del inciso (a)

$$\begin{aligned}|\psi_n(t)\rangle &= \frac{1}{2}\left(e^{-iE^+_{n+1}t/\hbar} + e^{-iE^-_{n+1}t/\hbar}\right)|e, n\rangle + i\frac{1}{2}\left(e^{-iE^+_{n+1}t/\hbar} - e^{-iE^-_{n+1}t/\hbar}\right)|g, n+1\rangle \\ &= e^{-i\omega_c(n+1)t}\left[\cos\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right)|e, n\rangle + \sin\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right)|g, n+1\rangle\right]\end{aligned}$$

Entonces

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega_c(n+1)t}\left[\cos\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right)|e, n\rangle + \sin\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right)|g, n+1\rangle\right]$$

y nos resta calcular $\langle\Psi(t)|d|\Psi(t)\rangle$

Usando que $\quad d\,|e,n\rangle = d_0\,|g,n\rangle \quad ; \quad d\,|g,n\rangle = d_0\,|e,n\rangle$

$$\langle d(t)\rangle = d_0 e^{|\alpha|^2}$$
$$\sum_{m\geq 0} \frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}} e^{i\omega_c(m+1)t} \left[\cos\left(\frac{\Omega\sqrt{m+1}}{2}t\right)\langle e,m| + \sin\left(\frac{\Omega\sqrt{m+1}}{2}t\right)\langle g,m+1|\right] \times$$
$$\times \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^{n}}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega_c(n+1)t} \left[\cos\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right)|g,n\rangle + \sin\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right)|e,n+1\rangle\right]$$

De los términos con $|e\rangle$, sólo sobreviven los términos con $m = n+1$.

De los términos con $|g\rangle$, sólo sobreviven los términos con $n = m+1$.

$$\langle d(t)\rangle = d_0 e^{|\alpha|^2}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^*|\alpha|^{2n}}{\sqrt{(n+1)!n!}} e^{i\omega_c t}\cos\left(\frac{\Omega\sqrt{n+2}}{2}t\right)\sin\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m\geq 0} \frac{\alpha|\alpha|^{2m}}{\sqrt{(m+1)!m!}} e^{-i\omega_c t}\cos\left(\frac{\Omega\sqrt{m+2}}{2}t\right)\sin\left(\frac{\Omega\sqrt{m+1}}{2}t\right)\right]$$
$$\langle d(t)\rangle = d_0 e^{|\alpha|^2}\left(\alpha^* e^{i\omega_c t} + \alpha e^{-i\omega_c t}\right)\sum_{n\geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{\sqrt{(n+1)!n!}}\cos\left(\frac{\Omega\sqrt{n+2}}{2}t\right)\sin\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right)$$
$$\langle d(t)\rangle = 2d_0 e^{|\alpha|^2}|\alpha|\cos\left(\omega_c t - \arg(\alpha)\right)\sum_{n\geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{\sqrt{(n+1)!n!}}\cos\left(\frac{\Omega\sqrt{n+2}}{2}t\right)\sin\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2}t\right)$$

En los distintos casos, encontramos

(a) $\langle d(t) \rangle = 0$

(b) $\langle d(t) \rangle =$
$2d_0 e^{|\alpha|^2} |\alpha| \cos\left(\omega_c t - \arg(\alpha)\right) \sum_{n \geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{\sqrt{(n+1)!n!}} \cos\left(\frac{\Omega\sqrt{n+2}}{2} t\right) \sin\left(\frac{\Omega\sqrt{n+1}}{2} t\right)$

- En el caso (b), donde la cavidad se encuentra en un estado coherente (estado semi-clásico), el valor medio del momento dipolar **oscila** igual que en el caso clásico (P1 de la guía).
- En el caso (a), donde la cavidad se encuentra en un estado de n fotones, el valor medio del momento dipolar se anula, contrastando con el comportamiento clásico.