

Física Teórica II

Guía 8: CQED

Nicolás Mirkin

10 de junio de 2021



Problema III

Pregunta general: ¿Cómo es la dinámica de un átomo que está acoplado a un campo de radiación de un solo modo en una cavidad?

El Hamiltoniano que describe este sistema tiene tres partes:

$$H_{JC} = H_A + H_C + H_{\text{int}} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - i\frac{\hbar\Omega}{2} \left(\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger \right)$$

Definimos el operador número de excitaciones como: $N = a^\dagger a + |e\rangle\langle e|$
cuyos autoestados son $\{ |g, 0\rangle; |e, 0\rangle; |g, 1\rangle; \dots; |e, n-1\rangle; |g, n\rangle \}$

→ cuentan el número total de cuantos en el sistema átomo-campo
a través de sus autovalores $n \in \mathbb{N}$

Por ejemplo: - $|g, 1\rangle$ tiene una única excitación que refiere al campo
- $|e, 0\rangle$ tiene una única excitación pero que refiere al átomo.

Hay degeneración de los autovalores de N entre los subespacios $\{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$.

Pregunta clave: ¿se conserva el número total de excitaciones?

Para responder eso, hay que estudiar: $[H_{JC}, N]$.

Es claro que: $[H_A, N] = [H_C, N] = 0 \longrightarrow$ Nos queda ver en detalle: $[H_{\text{int}}, N]$.

Jaynes, E. T., Cummings, F. W. (1963). Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1), 89-109.

Machete:

$$[\sigma_+, |e\rangle\langle e|] = -\sigma_+, \quad [\sigma_-, |e\rangle\langle e|] = \sigma_-$$

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a^\dagger, a^\dagger a] = -a^\dagger, \quad [a, a^\dagger a] = a$$

Estudiemos entonces $[H_{\text{int}}, N]$:

$$[H_{\text{int}}, N] = -i \frac{\hbar\Omega}{2} [(\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger), a^\dagger a + |e\rangle\langle e|]$$

$$= -i \frac{\hbar\Omega}{2} [(\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger), a^\dagger a + |e\rangle\langle e|]$$

$$= -i \frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma_+ [a, a^\dagger a] + [\sigma_+, |e\rangle\langle e|] a - [\sigma_-, |e\rangle\langle e|] a^\dagger - \sigma_- [a^\dagger, a^\dagger a])$$

$$= -i \frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma_+ a - \sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger + \sigma_- a^\dagger) = 0. \quad \longrightarrow \quad N \text{ es una cantidad conservada}$$

Por esta conservación, H_{JC} se va a poder separar en bloques 2x2 y el problema se reducirá a uno de dos niveles.

¿Cómo ver esto? Tomemos la base degenerada del operador N ($B_n = \{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$) y calculemos los elementos de matriz de H_{JC} en esta base. En particular, vamos a ver que $\{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$ son autoestados de H_A y H_C y luego estudiaremos en detalle qué sucede con H_{int} .

$$H_A |e, n - 1\rangle = \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z |e, n - 1\rangle = \frac{\hbar\omega_a}{2} |e, n - 1\rangle \longrightarrow \text{(es autoestado de } H_A)$$

$$\implies \langle e, n - 1 | H_A |e, n - 1\rangle = \frac{\hbar\omega_a}{2}$$

$$H_A |g, n\rangle = \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z |g, n\rangle = -\frac{\hbar\omega_a}{2} |g, n\rangle \longrightarrow \text{(es autoestado de } H_A)$$

$$\implies \langle g, n | H_A |g, n\rangle = -\frac{\hbar\omega_a}{2}$$

$$H_C |e, n - 1\rangle = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) |e, n - 1\rangle = \hbar\omega_c (n - 1 + 1/2) |e, n - 1\rangle \longrightarrow \text{(es autoestado de } H_C)$$


$$\implies \langle e, n - 1 | H_C |e, n - 1\rangle = \hbar\omega_c (n - 1/2)$$

$$H_C |g, n\rangle = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) |g, n\rangle = \hbar\omega_c (n + 1/2) |g, n\rangle \longrightarrow \text{(es autoestado de } H_C)$$

$$\implies \langle g, n | H_C |g, n\rangle = \hbar\omega_c (n + 1/2)$$

$$H_{int} |e, n - 1\rangle = -i \frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger) |e, n - 1\rangle = i \frac{\hbar\Omega}{2} \sqrt{n} |g, n\rangle$$

$$H_{int} |g, n\rangle = -i \frac{\hbar\Omega}{2} (\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger) |g, n\rangle = -i \frac{\hbar\Omega}{2} \sqrt{n} |e, n - 1\rangle$$


 si un estado es combinación lineal de los vectores de B_n ,
 el sistema va a evolucionar dentro del mismo subespacio
 y estará desconectado del resto del espacio de Hilbert.

→ H_{JC} quedará dividido en bloques de la siguiente forma:

$$H_{JC} = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & H_1 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & H_2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & H_n & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

en donde, a excepción de H_0 , cada bloque H_n de la diagonal es una matriz de 2×2 con un número total de excitaciones fijo, y que en la base $\{|e, n-1\rangle, |g, n\rangle\}$ es equivalente a:

$$H_n = \hbar \begin{bmatrix} n\omega_c + \Delta/2 & -i\frac{\Omega}{2}\sqrt{n} \\ i\frac{\Omega}{2}\sqrt{n} & n\omega_c - \Delta/2 \end{bmatrix} \quad \text{en donde definimos la **desintonía** como:}$$

$$\Delta = \omega_a - \omega_c$$

Si diagonalizamos esta matriz de 2×2 :

$$\det\{H_n - \lambda I\} = \lambda^2 - 2\lambda n\hbar\omega_c - \hbar^2 \frac{\Delta^2}{4} - \hbar^2 \frac{\Omega^2}{4} n + n^2 \hbar^2 \omega_c^2 = 0$$

→ $E_n^{(\pm)} = \hbar\omega_c n \pm \hbar\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Omega^2}{4}n}$

En cuanto a los **autoestados**, conviene parametrizarlos mediante $\{\sin(\theta_n), \cos(\theta_n)\}$ puesto que el módulo cuadrado de estos coeficientes representan probabilidades y deben estar normalizados:

$$(H_n - E_n^{(\pm)} I) \begin{pmatrix} \cos \theta_n \\ i \sin \theta_n \end{pmatrix} \implies \text{usando: } E_n^{(\pm)} = \hbar\omega_c n \pm \hbar\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Omega^2}{4}n}$$

$$\left(\hbar\omega_c n + \hbar\frac{\Delta}{2} - \hbar\omega_c n - \hbar\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Omega^2}{4}n} \right) \cos \theta_n + \frac{\Omega}{2} \sqrt{n} \sin \theta_n = 0$$

➔ Y más un poco de álgebra llegamos a que: $\tan \theta_n = \frac{\sqrt{\Delta^2 + \Omega^2 n} - \Delta}{\Omega \sqrt{n}}$

Por lo tanto se tiene que: $|n^{(+)}\rangle = \cos \theta_n |e, n-1\rangle + i \sin \theta_n |g, n\rangle$

Y por ortonormalidad: $|n^{(-)}\rangle = \sin \theta_n |e, n-1\rangle - i \cos \theta_n |g, n\rangle$

Veamos algunos casos particulares:

Caso resonante: $\Delta=0$

$E_n^{(\pm)} = \hbar\omega_c n \pm \hbar\frac{\Omega}{2}\sqrt{n}$ y los autoestados: $|n^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n-1\rangle \pm i |g, n\rangle)$

Caso alta desintonía (dispersivo): $|\Delta| \gg \Omega$

Podemos aproximar: $\sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Omega^2}{4}n} \sim \frac{\Delta}{2} \left(1 + 2n \frac{\Omega^2}{4\Delta^2} \right) \implies E_n^{(\pm)} = \hbar\omega_c n \pm \frac{\hbar\Delta}{2} \left(1 + n \frac{\Omega^2}{2\Delta^2} \right)$

Y para los autoestados, tenemos dos subcasos en el caso de alta desintonía:

Caso 1:

$\Delta \geq 0$ ($\omega_a \geq \omega_c$) \longrightarrow tenemos que $E_n^{(+)} \geq E_n^{(-)}$

y los autoestados resultan \longrightarrow $|n^{(+)}\rangle = |e, n-1\rangle$ puesto que: $\tan \theta_n \rightarrow 0$
 $\sin \theta_n \approx 0$ y $\cos \theta_n \approx 1$

Caso 2:

$\Delta \leq 0$ ($\omega_a \leq \omega_c$) \longrightarrow tenemos que el orden de las energías se invierte: $E_n^{(+)} \leq E_n^{(-)}$

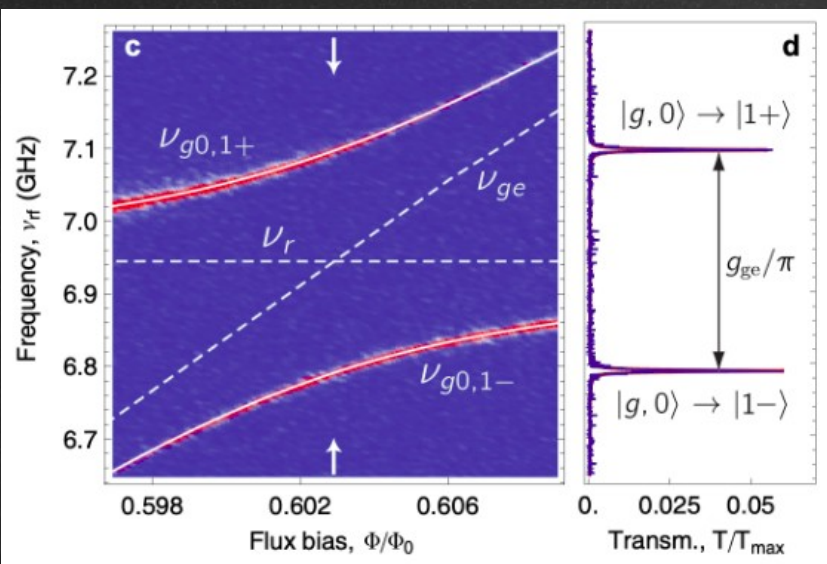
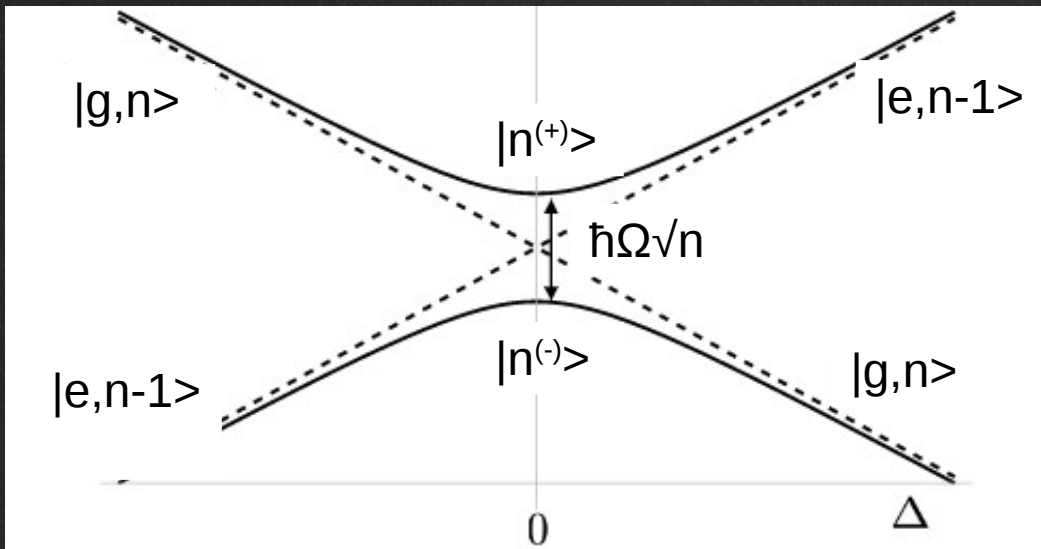
y el autoestado de mayor energía es: $|n^{(+)}\rangle = |g, n\rangle$
en vez de $|e, n-1\rangle$ usando que $\tan \theta_n \rightarrow +\infty$

En el **régimen dispersivo**, los autoestados son los autoestados del Hamiltoniano sin interacción.

Por último, veamos una interpretación gráfica del régimen dispersivo:



El espectro en el régimen dispersivo en función de la desintonía se ve como:



Medición directa del espectro de Jaynes-Cummings en función de la desintonía para un dado subespecio de 1 excitación (Fink et. al., Nature 454 (2008).)

<https://www.nature.com/articles/nature07112>