# Física Teórica II

Guía 8: CQED

Nicolás Mirkin

17 de junio de 2021

# Problema VIII

El Hamiltoniano de Jaynes-Cummings bajo la RWA era:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{JC}} = H_A + H_C + H_{\mathrm{int}} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) - i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+ \otimes a - \sigma_- \otimes a^\dagger\right)$$

donde para resolverlo habíamos definido la **desintonía** como: $\Delta = \omega_a - \omega_c$

Luego habíamos visto algunos casos particulares como:

- **El caso resonante:** Δ=0
- **El caso de alta desintonía (dispersivo):** |Δ|>>Ω

Ahora nos vamos a enfocar en el **régimen dispersivo** y vamos a mostrar que el $\mathrm{H}_{\mathrm{JC}}$ se puede escribir como:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{eff}} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes \left(a^\dagger a + 1\right)$$

En el Problema III, ya habíamos encontrado expresiones para la energía y para los autoestados en este régimen.
En particular, si Δ>0, los autoestados de $\mathrm{H}_{\mathrm{JC}}$ eran:

$$\left|n^{(+)}\right\rangle = |e, n-1\rangle$$

$\left|n^{(-)}\right\rangle = |g, n\rangle$ y las energías asociadas: $\mathrm{E}_n^{(\pm)} = \hbar\omega_c n \pm \frac{\hbar\Delta}{2}\left(1 + n\frac{\Omega^2}{2\Delta^2}\right)$

# Problema VIII

El plan es usar la descomposición espectral de H: $\mathrm{H}= \sum E \left|E\right\rangle \left\langle E\right|$

Expandiendo usando todos los bloques de 2x2 más el fundamental:

$$\mathrm{H}_{disp} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(+)} \left|e,n-1\right\rangle \left\langle e,n-1\right| + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(-)} \left|g,n\right\rangle \left\langle g,n\right| + E^{(g0)} \left|g,0\right\rangle \left\langle g,0\right|$$

Ahora vamos a reemplazar las energías que ya conocemos y ver qué queda:

$$\mathrm{E}_n^{(\pm)} = \hbar\omega_c n \pm \frac{\hbar\Delta}{2}\left(1 + n\frac{\Omega^2}{2\Delta^2}\right)$$

$$H_{disp} \simeq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\hbar\omega_c n + \frac{\hbar\Delta}{2} + n\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\right)\left|e,n-1\right\rangle \left\langle e,n-1\right|$$

$$\underbrace{+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hbar\omega_c n - \frac{\hbar\Delta}{2} - n\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\right)\left|g,n\right\rangle \left\langle g,n\right| - \frac{\hbar\Delta}{2}\left|g,0\right\rangle \left\langle g,0\right|}_{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hbar\omega_c n - \frac{\hbar\Delta}{2} - n\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\right)\left|g,n\right\rangle \left\langle g,n\right|}$$

**Siguiente paso:** forzar que la sumatoria de arriba también empiece en cero → llamo n=n’+1

Renombrando el índice de la sumatoria, tenemos:

$$H_{disp} \simeq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\hbar\omega_c(n+1) + \boxed{\frac{\hbar\Delta}{2}} + (n+1)\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\right)|e,n\rangle\langle e,n|$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hbar\omega_c n - \boxed{\frac{\hbar\Delta}{2}} - n\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\right)|g,n\rangle\langle g,n|$$

Voy a usar: $\Delta = \omega_a - \omega_c$

$$\Rightarrow H_{disp} \simeq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\hbar\omega_c(n+1/2) + \frac{\hbar\omega_a}{2} + (n+1)\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\right)|e,n\rangle\langle e,n|$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\hbar\omega_c(n+1/2) - \frac{\hbar\omega_a}{2} - n\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\right)|g,n\rangle\langle g,n|$$

Junto los términos verdes:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\hbar\omega_c(n+1/2)\underbrace{\Big(|e,n\rangle\langle e,n| + |g,n\rangle\langle g,n|\Big)}_{\underbrace{(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)}_{\mathbb{I}_A}\otimes|n\rangle\langle n|} \Rightarrow \mathbb{I}_A \otimes \sum_{n=0}^{\infty}\hbar\omega_c(n+1/2)|n\rangle\langle n|$$

$$= \mathbb{I}_A \otimes \hbar\omega_c(a^\dagger a + \mathbb{I}/2) = H_C$$

Junto los términos rosas: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hbar\omega_a}{2}\underbrace{(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)}_{\sigma_z}\otimes|n\rangle\langle n| \Rightarrow \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z\otimes\mathbb{I}_C = H_A$

¡Recuperamos el Hamiltoniano del átomo y de la cavidad!
Nos falta ver el de interacción, que va a ser ligeramente distinto:

$$H_{disp} \simeq H_A + H_C + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\left|e,n\right\rangle\left\langle e,n\right| + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(-(n+1)\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\Big)\left|g,n\right\rangle\left\langle g,n\right|$$

$$\simeq H_A + H_C + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\underbrace{\Big(\left|e,n\right\rangle\left\langle e,n\right| - \left|g,n\right\rangle\left\langle g,n\right|\Big)}_{\sigma_z\otimes|n\rangle\langle n|}$$

$$\simeq \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c(a^\dagger a + 1/2) + \underbrace{\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z\otimes\Big(1 + a^\dagger a\Big)}_{}$$

$H_{int}$ en régimen dispersivo

---

Esto nos permite hacer algunas interpretaciones:

**(1)** $$\mathrm{H}_{disp} \simeq \frac{\hbar}{2}\sigma_z\otimes\underbrace{\Big(\omega_a + \frac{\Omega^2}{2\Delta}(a^\dagger a + 1)\Big)}_{\tilde{\omega}_a} + \hbar\omega_c(a^\dagger a + 1/2)$$

$\tilde{\omega}_a \rightarrow$ nueva energía de transición que depende del número de fotones en la cavidad

$$H_{disp}\left|g,n\right\rangle = \left[-\frac{\hbar}{2}\Big(\omega_a + \frac{\Omega^2}{2\Delta}(n+1)\Big) + \hbar\omega_c(n+1/2)\right]\left|g,n\right\rangle$$

$$H_{disp}\left|e,n\right\rangle = \left[+\frac{\hbar}{2}\Big(\omega_a + \frac{\Omega^2}{2\Delta}(n+1)\Big) + \hbar\omega_c(n+1/2)\right]\left|e,n\right\rangle$$

¿Cómo es el gap de energía?

Tenemos:

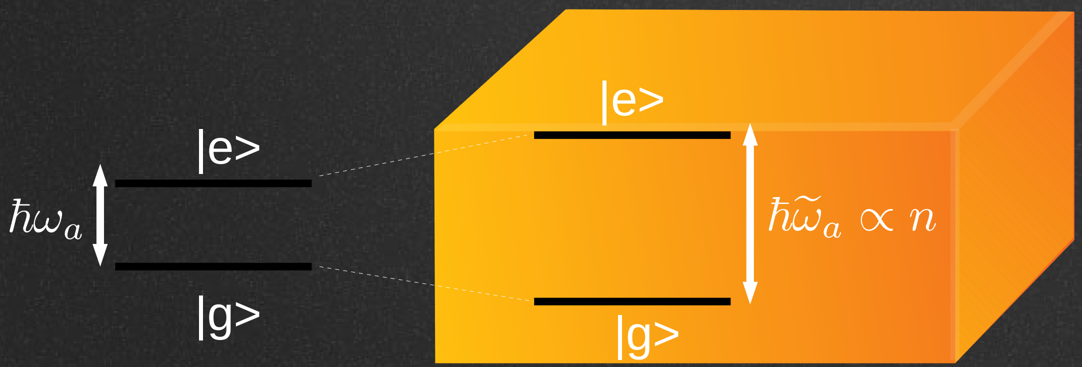
$$\langle g,n|\, H_{disp}\, |g,n\rangle = \left[ -\frac{\hbar}{2}\left(\omega_a + \frac{\Omega^2}{2\Delta}(n+1)\right) + \hbar\omega_c(n+1/2)\right]$$

$$\langle e,n|\, H_{disp}\, |e,n\rangle = \left[ +\frac{\hbar}{2}\left(\omega_a + \frac{\Omega^2}{2\Delta}(n+1)\right) + \hbar\omega_c(n+1/2)\right]$$

El gap de energía es:

$$\Delta E_{eg}^{(n)} = \hbar\left(\omega_a + \frac{\Omega^2}{2\Delta}(n+1)\right) = \hbar\widetilde{\omega}_a$$

La separación de niveles del átomo aumentó en un factor proporcional al número de fotones. **Midiendo sobre el átomo puedo inferir el estado de la cavidad.**




**¿Y si la cavidad está vacía?**

$$\Delta E_{eg}^{(0)} = \hbar\left(\omega_a + \frac{\Omega^2}{2\Delta}\right)$$

**Pasan cosas!!!**

El átomo interactúa con el vacío del campo. El campo cero no existe, hay fluctuaciones cuánticas **siempre**. Este es un efecto medible.

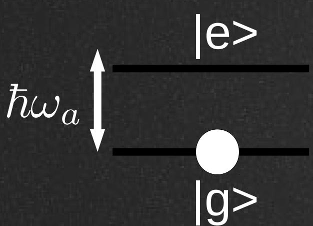
El H dispersivo era: $H_{disp} \simeq \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c(a^\dagger a + 1/2) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes \left(1 + a^\dagger a\right)$

Pensemos en **otra interpretación**:

**(2)** $\mathrm{H}_{disp} \simeq \frac{\hbar}{2}\left(\omega_a + \frac{\Omega^2}{2\Delta}\right)\sigma_z + \hbar\underbrace{\left(\omega_c + \frac{\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z\right)}_{\widetilde{\omega}_c} \otimes a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_c}{2}$

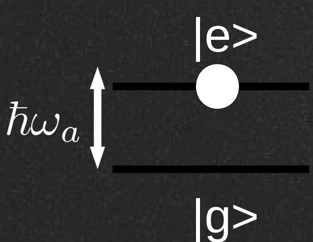
$\widetilde{\omega}_c \rightarrow$ la frecuencia del modo normal del campo cambia en una cantidad que depende del estado del átomo a través de $\sigma_z$.

- Si el átomo está en el fundamental:




la frecuencia de la cavidad cambia en: $\widetilde{\omega}_c = \omega_c - \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}$

- Si el átomo está en el excitado:




la frecuencia de la cavidad cambia en: $\widetilde{\omega}_c = \omega_c + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}$

Midiendo la cavidad, podemos inferir el estado del átomo sin interferir sobre él.

El H dispersivo era:
$$H_{disp} \simeq \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c(a^\dagger a + 1/2) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes \left(1 + a^\dagger a\right)$$
$$\simeq \frac{\hbar}{2}\left(\omega_a + \frac{\Omega^2}{2\Delta}\right)\sigma_z + \hbar\omega_c(a^\dagger a + 1/2) + \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes a^\dagger a$$
$$\simeq \widetilde{H}_A + H_C + \widetilde{H}_{int}$$

$$[\mathrm{H}_A, H_C] = 0, \quad [H_A, H_{int}] = 0, \quad [H_C, H_{int}] = 0$$

$$\implies \{\, |e,n\rangle \,, |g,n\rangle \,\} \text{ son autoestados de H}$$

Como todos conmutan, el operador evolución lo puedo escribir como:

$$\mathrm{U}_{disp}(t) = \exp\left(-it\frac{H_{disp}}{\hbar}\right) = \exp\left(-it\frac{\widetilde{H}_A}{\hbar}\right)\exp\left(-it\frac{H_C}{\hbar}\right)\exp\left(-it\frac{\widetilde{H}_{int}}{\hbar}\right)$$

Consideremos un estado inicial del átomo más cavidad:

$|\psi_{AC}(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|e\rangle + |g\rangle\,\right) \otimes |\alpha\rangle$ y estudiemos la evolución temporal.

Veamos por separado: $|e\rangle \otimes |\alpha\rangle \qquad |g\rangle \otimes |\alpha\rangle$

$$\Longrightarrow \mathrm{U}_{disp}\,|e\rangle \otimes |\alpha\rangle = \exp\left(-it\frac{\widetilde{H}_A}{\hbar}\right)\exp\left(-it\frac{H_C}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{it\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z \otimes a^\dagger a\right)|e\rangle \otimes |\alpha\rangle$$

La evolución temporal resulta:

$$U_{disp}\left|e\right\rangle\otimes\left|\alpha\right\rangle=\exp\left(-it\frac{\widetilde{H}_A}{\hbar}\right)\exp\left(-it\frac{H_C}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{it\Omega^2}{4\Delta}\sigma_z\otimes a^\dagger a\right)\left|e\right\rangle\otimes\left|\alpha\right\rangle$$

$$=\exp\left(-it\frac{\widetilde{H}_A}{\hbar}\right)\exp\left(-it\frac{H_C}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{it\Omega^2}{4\Delta}a^\dagger a\right)\left|e\right\rangle\otimes\left|\alpha\right\rangle$$

Y además:

$$\exp\left(-\frac{it\Omega^2}{4\Delta}a^\dagger a\right)\left|\alpha\right\rangle=\left|\alpha\exp\left(-\frac{it\Omega^2}{4\Delta}\right)\right\rangle$$

(es equivalente a la ev. temporal del oscilador armónico, ver clase estados coherentes)

Me falta la ev. con los otros dos H’s:

$$\Longrightarrow U_{disp}\left|e\right\rangle\otimes\left|\alpha\right\rangle=\exp\left(-it\frac{\widetilde{H}_A}{\hbar}\right)\exp\left(-it\frac{H_C}{\hbar}\right)\left|e\right\rangle\otimes\left|\alpha\exp\left(-\frac{it\Omega^2}{4\Delta}\right)\right\rangle$$

$$=\exp(-i\widetilde{\omega}_a t)\left|e\right\rangle\otimes\left|\alpha\exp\left(-\frac{it\Omega^2}{4\Delta}\right)\exp(-i\omega_c t)\right\rangle$$

Y para el otro estado es análogo:

$$U_{disp}\left|g\right\rangle\otimes\left|\alpha\right\rangle=\exp(+i\widetilde{\omega}_a t)\left|g\right\rangle\otimes\left|\alpha\exp\left(+\frac{it\Omega^2}{4\Delta}\right)\exp(-i\omega_c t)\right\rangle$$

Juntando las dos evoluciones;

$$|\psi_{AC}(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big( |e\rangle + |g\rangle \Big) \otimes |\alpha\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad |\psi_{AC}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg( \exp(-i\widetilde{\omega}_a t)\,|e\rangle \otimes \left|\alpha \exp\left(-\frac{it\Omega^2}{4\Delta}\right)\exp(-i\omega_c t)\right\rangle + \exp(+i\omega_a t)\,|g\rangle \otimes \left|\alpha \exp\left(+\frac{it\Omega^2}{4\Delta}\right)\exp(-i\omega_c t)\right\rangle \Bigg)$$

La dirección en la que rota el estado coherente depende del estado del átomo. El estado global es entrelazado.

**Tarea para el hogar:** Calcular la matriz densidad reducida del átomo y verificar que es un estado mixto.