1) a) $P_+|\psi\rangle = \dfrac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_-(j_-+1)}{j_+(j_++1) - j_-(j_-+1)} \cdot \left(\alpha_+|j_+; l, s=1/2\rangle + \alpha_-|j_-; l, s=1/2\rangle\right)$

se sabe $\hat{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle$

$P_+|\psi\rangle = \dfrac{j_+(j_++1) - j_-(j_-+1)}{j_+(j_++1) - j_-(j_-+1)} \alpha_+|j_+, l, s=1/2\rangle$

delfinarj@gmail.com

$+ \dfrac{\cancel{j_-(j_-+1) - j_-(j_-+1)}}{j_+(j_++1) - j_-(j_-+1)} \alpha_-|j_-; l, s=1/2\rangle = \alpha_+|j_+, l, s=\frac{1}{2}\rangle$

$P_-|\psi\rangle = \dfrac{\hat{J}^2/\hbar^2 - j_+(j_++1)}{j_-(j_-+1) - j_+(j_++1)}|\psi\rangle = \dfrac{\cancel{j_+(j_++1) - j_+(j_++1)}}{j_-(j_-+1) - j_+(j_++1)} \alpha_+|j_+\rangle$

$+ \dfrac{j_-(j_-+1) - j_+(j_++1)}{j_-(j_-+1) - j_+(j_++1)} \alpha_-|j_-; l, s=1/2\rangle = \alpha_-|j_-; l, s=\frac{1}{2}\rangle$

o sea que P_+ se queda con el estado con j_+ y anula el de j_-, y viceversa para P_-.

b) $P_+ = \dfrac{l+1+2\bar{L}\cdot\bar{S}/\hbar^2}{2l+1}$ y $P_- = \dfrac{l-2\bar{L}\cdot\bar{S}/\hbar^2}{2l+1}$

para estados con l definido y spin $1/2$.

Para hacer aparecer $\bar{L}\cdot\bar{S}$, $\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + \hat{L}\cdot\hat{S} + \hat{S}\cdot\hat{L}$

$= \bar{L}^2 + \bar{S}^2 + 2\bar{L}\cdot\bar{S}$ porque conmutan

$L^2 = l(l+1)\hbar^2$ y $\bar{S}^2 = \hbar^2 s(s+1) = \hbar^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}\hbar^2$

entonces

$$P_+ = \dfrac{\overbrace{l(l+1) + 3/4 + \dfrac{2\bar{L}\cdot\bar{S}}{\hbar^2}}^{\hat{J}^2/\hbar^2} - \left(l-\frac{1}{2}\right)\left(l-\frac{1}{2}+1\right)}{\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}+1\right) - \left(l-\frac{1}{2}\right)\left(l-\frac{1}{2}+1\right)}$$

$$= \frac{l + 2\bar{L}\cdot\bar{S}/\hbar^2 + 1}{2l+1} \quad ✓$$

$$P_- = \frac{l(l+1) + 3/4 + 2\bar{L}\cdot\bar{S}/\hbar^2 - (l+\frac{1}{2})\cdot(l+\frac{1}{2}+1)}{(l-\frac{1}{2})(l-\frac{1}{2}+1) - (l+\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2}+1)}$$

$$= \frac{-l + 2\bar{L}\cdot\bar{S}/\hbar^2}{-2l-1} = \frac{l - 2\bar{L}\cdot\bar{S}/\hbar^2}{2l+1}$$

c) $P_+ |l=1, s=1/2; m_l=-1, m_s=1/2\rangle =$ con la ayuda.

$$= \frac{l+1+2\frac{L_z S_z}{\hbar^2} + \frac{L_+ S_-}{\hbar^2} + \frac{L_- S_+}{\hbar^2}}{2l+1} |l=1, s=1/2; m_l=-1, m_s=1/2\rangle$$

$l=1$

$\bar{S}_z|s,m_s\rangle = \hbar m_s |s,m_s\rangle$

Hago C.A

$\bar{L}_z \bar{S}_z |l=1, s=1/2, m_l=-1, m_s=\frac{1}{2}\rangle = \bar{L}_z \frac{\hbar}{2} |l=1, s=1/2, m_l=-1, m_s=\frac{1}{2}\rangle$

$= -\frac{\hbar^2}{2} |l=1, s=1/2, m_l=-1, m_s=\frac{1}{2}\rangle$

$\bar{L}_z|l, m_l\rangle = m_l\hbar|l, m_l\rangle$

$\bar{S}_-|s,m_s\rangle = \hbar\sqrt{s\cdot(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\,|s, m_s-1\rangle$

$\bar{L}_+ \bar{S}_- |\quad\rangle = \bar{L}_+ \hbar |l=1, s=1/2, m_l=-1, m_s=-\frac{1}{2}\rangle$

$= \hbar^2\sqrt{2}\,|l=1, s=1/2, m_l=0, m_s=-\frac{1}{2}\rangle$

$\bar{L}_- \bar{S}_+ |\quad\rangle = \bar{L}_- \hbar\cdot 0 |\quad\rangle = 0$

Entonces $P_+|l=1, s=1/2, m_l=-1, m_s=1/2\rangle =$

$|l=1, s=1/2, m_l=-1, m_s=1/2\rangle$ $|l=1, s=1/2, m_l=-1, m_s=1/2\rangle$

$$= \underbrace{(l+1) + \frac{2}{\hbar^2}\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2}\right)}_{3} + \frac{\hbar^2}{\hbar^2}\sqrt{2}\,|l=1, s=1/2, m_l=0, m_s=-\frac{1}{2}\rangle$$

$= \frac{2}{3} \,\cancel{\,}\, \rightarrow \frac{1}{3} |l=1, s=1/2, m_l=-1, m_s=1/2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} |l=1, s=1/2, m_l=0, m_s=-\frac{1}{2}\rangle$

$|l=1, s=\frac{1}{2}, m_l=-1, m_s=1/2\rangle$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(|l=1, s=1/2, m_l=-1, m_s=1/2\rangle + \sqrt{2} \, |l=1, s=1/2, m_l=0, m_s=-\frac{1}{2}\rangle \right.$

para que esté normalizado.

$P_+ |\quad\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(|\overset{l=1, s=1/2}{m_l=-1, m_s=1/2}\rangle + \sqrt{2} \, |\overset{l=1, s=1/2}{m_l=0, m_s=-\frac{1}{2}}\rangle \right)$

quiero ver que es el estado

$|j=3/2, m_j=-1/2, l=1, s=1/2\rangle$.

Estoy con $l=1$ y $s=1/2$. En la tabla de CG voy al recuadro $1 \times 1/2$.

m_l	m_s	$J = 3/2$, $M_J = -1/2$
0	$-1/2$	$2/3$
-1	$1/2$	$1/3$

, y $\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt{\frac{2}{3}}$ son

Ahí veo que aparecen los coeficientes (x)

(x) para $m_l=0$ y $m_s=-\frac{1}{2}$, se tenía $\sqrt{\frac{2}{3}}$

para $m_l=-1$ $m_s=1/2$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, coherente

esto dice que

$|J=3/2, M_J=-1/2, l=1, s=\frac{1}{2}\rangle$

d) ahora $l=7$, $m_l=3$ y $m_s=-\frac{1}{2}$.

valores de J medibles y probabilidades.

No puedo usar la tabla ahora

$$j_\pm = l \pm \frac{1}{2} \to j_+ = 7 + \frac{1}{2}, \quad j_- = 7 - \frac{1}{2}$$ los valores posibles.

$$\text{Prob}\left(j = 7 + \frac{1}{2}\right) = \left\langle l=7, m_l=3, s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2} \right| \overset{\text{P } j_+}{P_+} \left| l=7, m_l=3, s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2} \right\rangle$$

£A

$$L_z S_z \left| l=7, m_l=3, s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2} \right\rangle = L_z\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left| l=7, m_l=3, s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= -\frac{3}{2}\hbar^2 \left| l=7, m_l=3, s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2} \right\rangle$$

los otros términos cambian los valores de m_l y m_s por lo que van a dar cero al hacer $\langle \mid \rangle$ porque son ortogonales los estados.

Entonces $P_+ \left| l=7, m_l=3, s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2} \right\rangle$ se reduce a...

$$\frac{\left(7+1+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{\hbar^2}\right)\right)}{2\cdot 7+1}\left| l=7, m_l=3, s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= \frac{8-3}{15}\left| l=7, m_l=3, s=1/2, m_s=-1/2 \right\rangle$$

así que la Prob $\left(j=7+\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{15} \underbrace{\left\langle l=7, m_l=3, s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2} \right| \left. l=7, m_l=3, s=\frac{1}{2}, m_s=-\frac{1}{2} \right\rangle}_{1}$

$= \frac{1}{3}$. y Prob$\left(j=7-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (o bien lo mismo con P_-)

2) Perturbación al H dado por $V = \lambda x z$.

a) Probar que $T^{(2)}_{\pm 1} = \mp xz - iyz$ son tensores esféricos irreducibles.

Grado 2 en x, y, z. Veo los Y_2^m.

En base a la clase, se puede pensar en

$$r^2 Y_2^{\pm 1} = \mp r^2 \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, e^{\pm i\phi} =$$

$$= \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \, r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cdot (\cos\phi \pm i \operatorname{sen}\phi).$$

$$= \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \left(r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\phi \pm i r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\phi \right)$$

$$= \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \left(\underbrace{r \operatorname{sen}\theta \cos\phi}_{x} \, \underbrace{r\cos\theta}_{z} \pm i \, \underbrace{r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}_{y} \, \underbrace{r\cos\theta}_{z} \right)$$

$$= \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \, xz - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \, i \, yz.$$

o sea que $T^{(2)}_{\pm 1} = 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}} \, r^2 Y_2^{\pm 1}$.

b) $l \leq 2$ $\therefore -2 \leq m \leq 2$ idem l' y m'

$l < n$. además, y $-l \leq m \leq l$.

$$V = \lambda XZ = \frac{\lambda}{2}\left(T_{-1}^{2} - T_{+1}^{2}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(\langle 2l'm'|T_{-1}^{2}|2lm\rangle - \langle 2l'm'|T_{+1}^{2}|2lm\rangle\right)$$

$$\langle 2l'm'|T_{-1}^{(2)}|2lm\rangle = \langle l2; m-1|l'm'\rangle T_{22}^{2\,l'l}$$

son cero salvo que $m + (-1) = m'$

y $|l-2| \leq l' \leq l+2$.

l o $l' = \{0, 1, \cancel{2}\}$ m o $m' = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$m = m'+1$ así que los (m, m') tq el coef $\neq 0$

son $(-1; 2)$ $(0, -1)$ $(1, 0)$ $(2, 1)$

para los l... $|0-2| \leq l' \leq 0+2$ $2 \leq l' \leq 2$

$l=0$ $\cancel{l' = 2}$

$|1-2| \leq l' \leq 1+2$ $1 \leq l' \leq 3$

solo sirve el par $(l, l') = (1, 1)$ $l = 1$ $l' = 1$

usando que $-l \leq m \leq l$ sale que $-1 \leq m \leq 1$

o sea que el par $(-1, 2)$ y el $(2, 1)$ y $-1 \leq m' \leq 1$ tmb

tampoco juegan.

en conclusión, quedan los (l, m, l', m')

del tipo $(1, 0, 1, -1)$ y $(1, 1, 1, 0)$

de este modo, se tienen.

$\langle 2\,1\,-1 | T^{(2)}_{-1} | 2\,1\,0\rangle$.

y $\langle 2\,1\,0 | T^{(2)}_{-1} | 2\,1\,1\rangle = a$ (asumo error de tipeo en el enunciado, no tiene sentido si no).

$\downarrow$ $a = \langle 1\,2\,1\,-1 | 1\,0\rangle\, T_{22}^{211}$

~~a = ...~~

1×2 no aparece, sí 2×1.

$\langle 1\,2, 1\,-1 | 1\,0\rangle = (-1)^{1-1-2} \langle 2\,1\,-1\,1 | 1\,0\rangle$

2×1 $\quad$ $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$

$-1\;1$ $\quad$ $\boxed{\sqrt{3/10}}$

$a = \sqrt{\frac{3}{10}}\, T_{22}^{211}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{10}{3}}\, a = T_{22}^{211}$

$\langle 2\,1\,-1 | T^{2}_{-1} | 2\,1\,0\rangle = \langle 1\,2, 0\,-1 | 1\,-1\rangle\, T_{22}^{211} = \cancel{-\sqrt{\frac{3}{10}}\sqrt{\frac{10}{3}}\, a}$

$\downarrow$

$(-1)^{1-1-2} \langle 2\,1, -1\,0 | 1\,-1\rangle$

2×1 $\quad$ $\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}$

$-1\;0$ $\quad$ $\boxed{-\sqrt{\frac{3}{10}}}$

$\overline{\langle\psi|A|\varphi\rangle} = \langle\varphi|A^{+}|\psi\rangle$

y $\left(T^{2}_{+1}\right)^{+} = -xz + iyz = -(xz - iyz) = -T^{2}_{-1}$

$\langle 2\,l'm' | T^{2}_{-1} | 2\,l\,m\rangle = \langle 2\,l\,m | T^{2}_{+1} | 2\,l'm'\rangle$

$-(-a) = \langle 2\,1\,0 | T^{2}_{+1} | 2\,1\,-1\rangle = a$

$-a = \langle 2\,1\,1 | T^{2}_{+1} | 2\,1\,0\rangle = -a$

$\langle 2 1 -1 | V | 2 1 0 \rangle = -a\frac{\lambda}{2}$

$\langle 2 1 0 | V | 2 1 1 \rangle = a\frac{\lambda}{2}$

$\langle 2 1 0 | V | 2 1 -1 \rangle = -a\frac{\lambda}{2}$ → es $-\langle \, | T_{+1}^{2} | \, \rangle$

$\langle 2 1 1 | V | 2 1 0 \rangle = +a\frac{\lambda}{2}$ → porque $V = \frac{\lambda}{2}(T_{-} - T_{+})$