# 1 Ejercicio 1

(a) El versor que indica el enunciado se escribe

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{z}} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{z}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{x}}\,, \tag{1}$$

por lo tanto

$$\boxed{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}S_z + \frac{\sqrt{2}}{2}S_x = \hbar\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}} \tag{2}$$

en la base $\{|m_z\rangle\}$.

(b) Al salir del SG2 el estado es $|\hat{\mathbf{n}},+\rangle$, el autoestado de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ asociado al autovalor $+\hbar$ (no necesitamos calcular los autovalores de $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$, pues ya sabemos que para una partícula de spin 1 son siempre $\{\hbar, 0, -\hbar\}$). Desarrollando en la base $\{|m_z\rangle\}$

$$|\hat{\mathbf{n}},+\rangle = a|+\rangle \;+\; b|0\rangle \;+\; c|-\rangle\,. \tag{3}$$

Entonces podemos determinar el estado a partir de

$$(\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} - \hbar)|\hat{\mathbf{n}},+\rangle = \hbar\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

> **Nota de color**: Una forma práctica de resolver algunos sistemas de ecuaciones.
>
> Notar que la ecuación a la que llegamos dice que $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ es ortogonal a las tres filas de la matriz. Dado que sabemos que sólo hay dos filas independientes, nos alcanza entonces con encontrar un vector ortogonal a dos filas cualesquiera. La conclusión es que la solución es proporcional al producto vectorial entre dos filas cualesquiera. Esta es una forma práctica de resolver sistemas de ecuaciones de $3\times 3$ sin la necesidad de triangular ni despejar.

En vista de la nota anterior y tomando la primera y tercera fila, una solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

De yapa tuvimos la suerte de obtener un estado ya normalizado y por lo tanto el mismo es efectivamente el estado buscado. Escrito explícitamente

$$\boxed{|\hat{\mathbf{n}},+\rangle = -\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\right)|+\rangle \;-\; \frac{1}{2}|0\rangle \;+\; \left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\right)|-\rangle} \tag{6}$$

(c) Evaluando la matriz de rotación en $\beta = \frac{\pi}{4}$ y aplicando sobre $|+\rangle$

$$e^{-iL_y \frac{\pi}{4}/\hbar}|+\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Al comparar con el resultado del inciso anterior podemos ver que obtuvimos $-|\hat{\mathbf{n}},+\rangle$. Dado que los estados se encuentran definidos a menos de una fase global, el signo de diferencia es irrelevante y los resultados de los incisos (b) y (c) corresponden al mismo estado físico.

(d) La probabilidad de que una partícula en el estado $|+\rangle$ atraviese el SG2 está dada por la regla de Born

$$P(|\hat{\mathbf{n}},+\rangle||\hat{\mathbf{z}},+\rangle) = |\langle \mathbf{n},+|\hat{\mathbf{z}},+\rangle|^2 \ . \tag{8}$$

Análogamente la probabilidad de que una partícula en el estado $|\hat{\mathbf{n}},+\rangle$ atraviese el SG3 es

$$P(|\hat{\mathbf{z}},-\rangle||\hat{\mathbf{n}},+\rangle) = |\langle \hat{\mathbf{z}},-|\mathbf{n},+\rangle|^2 \ . \tag{9}$$

Finalmente la probabilidad de que la partícula atraviese ambos SG está dada por el producto de las probabilidades anteriores

$$\boxed{P_T = |\langle \mathbf{n},+|\hat{\mathbf{z}},+\rangle|^2 \, |\langle \hat{\mathbf{z}},-|\mathbf{n},+\rangle|^2 = \frac{1}{64}} \tag{10}$$

$\boxed{2}$ **(a)** Tenemos un Hamiltoniano de la forma

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -i & 0 \\ 0 & i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

y el estado inicial del sistema es

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_3\rangle . \tag{2}$$

Nos preguntan por los posibles resultados de medición a $t = 0$ y por la probabilidad correspondiente. Los posibles resultados de medición serán los autovalores de H, para lo cual necesitamos diagonalizar el operador, y para las probabilidades deberemos remitirnos a la regla de Born. Planteando el polinomio característico, los autovalores de H resultan $\{3\hbar\omega_0, -\hbar\omega_0, +\hbar\omega_0 \text{ (degenerado x2)}\}$ y los autoestados asociados (a menos de un fase global irrelevante) son

$$\begin{aligned} |e_{-1}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_4\rangle - |u_1\rangle) \qquad & |e_{+3}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\,|u_2\rangle + |u_3\rangle) \\ \left|e_{+1}^{(1)}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_4\rangle) \qquad & \left|e_{+1}^{(2)}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\,|u_2\rangle + |u_3\rangle). \end{aligned} \tag{3}$$

A partir de estos autoestados, ahora estamos en condiciones de plantear la regla de Born y calcular la probabilidad asociada a medir cada autovalor. Tenemos que calcular el valor medio del proyector asociado al autovalor $e_i$ en el estado inicial $|\psi(0)\rangle$, es decir,

$$\begin{aligned} P(-\hbar\omega_0|\psi(0)) &= \langle\psi(0)|\,\Pi_{-1}\,|\psi(0)\rangle = |\,\langle\psi(0)|\,e_{-1}\rangle|^2 = 1/4 \\ P(3\hbar\omega_0|\psi(0)) &= \langle\psi(0)|\,\Pi_{+3}\,|\psi(0)\rangle = |\,\langle\psi(0)|\,e_{+3}\rangle|^2 = 1/4 \\ P(+\hbar\omega_0|\psi(0)) &= \langle\psi(0)|\,\Pi_{+1}\,|\psi(0)\rangle = |\,\langle\psi(0)|\,e_{+1}^{(1)}\rangle|^2 + |\,\langle\psi(0)|\,e_{+1}^{(2)}\rangle|^2 = 1/4 + 1/4 = 1/2, \end{aligned} \tag{4}$$

en donde hemos usado que los proyectores asociados a los autovalores $e_i$ son

$$\begin{aligned} \Pi_{-1} &= |e_{-1}\rangle\langle e_{-1}| \\ \Pi_{+3} &= |e_{+3}\rangle\langle e_{+3}| \\ \Pi_{+1} &= \left|e_{+1}^{(1)}\right\rangle\left\langle e_{+1}^{(1)}\right| + \left|e_{+1}^{(2)}\right\rangle\left\langle e_{+1}^{(2)}\right| . \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora nos piden calcular el valor medio de H y su varianza, para lo cual es conveniente expresar a H en notación de Dirac

$$H = \hbar\omega_0\Big(2\,|u_2\rangle\langle u_2| + 2\,|u_3\rangle\langle u_3| + |u_1\rangle\langle u_4| + |u_4\rangle\langle u_1| - i\,|u_2\rangle\langle u_3| + i\,|u_3\rangle\langle u_2|\Big), \tag{6}$$

a partir de lo cual el valor medio de H resulta

$$\langle\psi(0)|\,H\,|\psi(0)\rangle = 2\hbar\omega_0. \tag{7}$$

Para la varianza, precisamos la expresión de $H^2$ y luego calcular su valor medio

$$H^2 = \hbar^2{\omega_0}^2\Big(4\,|u_2\rangle\langle u_2| + 4\,|u_3\rangle\langle u_3| + |u_1\rangle\langle u_1| + |u_4\rangle\langle u_4| - 4i\,|u_2\rangle\langle u_3| + 4i\,|u_3\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3| + |u_2\rangle\langle u_2|\Big), \tag{8}$$

y además

$$\langle H^2\rangle = \frac{1}{2}\hbar^2\omega_0^2(1+4+1) = 3\hbar^2\omega_0^2. \tag{9}$$

Con estos cálculos, la varianza es sencillamente

$$\mathrm{Var}(H) = \langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2 = 3\hbar^2\omega_0^2 - \hbar^2\omega_0^2 = 2\hbar^2\omega_0^2 \tag{10}$$

**(b)** El operador A es

$$\begin{aligned} A &= a\,|u_1\rangle\langle u_1| + a|u_1\rangle\langle u_4| + a|u_4\rangle\langle u_1| + 2a|u_2\rangle\langle u_2| + 2a|u_3\rangle\langle u_3| + a|u_4\rangle\langle u_4| \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

Los autovalores de A resultan $\{0, 2a\,(\text{degenerado x3})\}$ y los autoestados asociados (a menos de un fase global irrelevante) son

$$\begin{aligned} &\left|a_{+2}^{(1)}\right\rangle = |u_2\rangle \qquad \left|a_{+2}^{(2)}\right\rangle = |u_3\rangle \\ &\left|a_{+2}^{(3)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_4\rangle) \qquad |a_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|u_1\rangle + |u_4\rangle). \end{aligned} \tag{12}$$

Calculamos las probabilidades del mismo modo a como procedimos en el inciso anterior,

$$\begin{aligned} &P(0|\psi(0)) = |\langle a_0|\psi(0)\rangle|^2 = 1/4 \\ &P(+2a|\psi(0)) = \left|\left\langle a_{+1}^{(1)}\middle|\psi(0)\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle a_{+1}^{(2)}\middle|\psi(0)\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle a_{+1}^{(3)}\middle|\psi(0)\right\rangle\right|^2 = 0 + 1/2 + 1/4 = 3/4. \end{aligned} \tag{13}$$

Con respecto al estado después de la medición, sabemos por los postulados que el estado colapsará al autoestado o al set de autoestados asociados al autovalor medido, dependiendo de si el autovalor es o no degenerado. En nuestro caso, tenemos

$$\begin{aligned} &\text{Si mido 0} \implies \left|\tilde{\psi}\right\rangle = |a_0\rangle \\ &\text{Si mido +2a} \implies \left|\tilde{\tilde{\psi}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{P(+2a|\psi(0))}}\Pi_{+2a}\,|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|u_3\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}(|u_1\rangle + |u_4\rangle), \end{aligned} \tag{14}$$

donde hemos usado para el caso degenerado que

$$\Pi_{+2a} = |u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3| + \frac{1}{2}(|u_1\rangle + |u_4\rangle)(\langle u_1| + \langle u_4|). \tag{15}$$

Ahora nos preguntan si H y A forman un CCOC, para lo cual lo primero que tenemos que chequear es si ambos operadores conmutan. Haciendo la cuenta explícita, tenemos

$$\begin{aligned} [H, A] &= \hbar\omega_0 a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -i & 0 \\ 0 & i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \hbar\omega_0 a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -i & 0 \\ 0 & i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= [...] = 0 \implies \text{conmutan y comparten base de autoestados.} \end{aligned} \tag{16}$$

Ahora bien, ¿cuál es esa base común de autoestados? En primer lugar notemos que $\left|a_{+2}^{(3)}\right\rangle = \left|e_{+1}^{(1)}\right\rangle$ y además $|a_0\rangle = |e_{-1}\rangle$, con lo cual ya hay dos autoestados de cada operador que son idénticos. Por otro lado, es sencillo comprobar que los otros dos autoestados de H ($|e_{+3}\rangle$ y $\left|e_{+1}^{(2)}\right\rangle$) son combinaciones lineales de $\left|a_{+2}^{(1)}\right\rangle$ y $\left|a_{+2}^{(2)}\right\rangle$, por lo que también son autoestados del operador A. En conclusión, tenemos que la base de autoestados de H es también base de autoestados de A. Nos queda verificar si H y A son o no CCOC. Supongamos que mido la energía y obtengo el autovalor $+\hbar\omega_0$. Eso quiere decir que mi estado es o bien $\left|e_{+1}^{(1)}\right\rangle$ o $\left|e_{+1}^{(2)}\right\rangle$. Si a continuación mido A y obtengo +2a, ¿puedo determinar con certeza en cuál de estos dos estados está mi sistema? Como la respuesta es no, no son CCOC. Pero si la respuesta hubiera sido sí, debería seguir mirando el resto de las posibilidades.

**(c)** Siempre que estudiemos la evolución temporal, es conveniente expresar nuestro estado inicial en la base del Hamiltoniano H, es decir,

$$\begin{aligned} &|\psi(0)\rangle = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i|\psi(0)\rangle \\ &\implies |\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle = e^{-iHt/\hbar}\sum_i |e_i\rangle\langle e_i|\psi(0)\rangle = \sum_i e^{-ie_it/\hbar}|e_i\rangle\langle e_i|\psi(0)\rangle\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Para el caso particular en que a $t = 0$ no se mide nada, nuestro estado inicial era $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_3\rangle)$ y para expresar dicho estado en la base de energía precisamos calcular los productos internos

$$\begin{aligned} &\langle e_{-1}|\psi(0)\rangle = -1/2 \quad \left\langle e_{+1}^{(1)}\middle|\psi(0)\right\rangle = 1/2 \\ &\left\langle e_{+1}^{(2)}\middle|\psi(0)\right\rangle = 1/2 \quad \langle e_{+3}|\psi(0)\rangle = 1/2. \end{aligned} \tag{18}$$

Con lo cual nuestro estado inicial en la base de H, queda $|\psi(0)\rangle = -\frac{1}{2}|e_{-1}\rangle + \frac{1}{2}\left|e_{+1}^{(1)}\right\rangle + \frac{1}{2}\left|e_{+1}^{(2)}\right\rangle + \frac{1}{2}|e_{+3}\rangle$. En consecuencia, el estado evolucionado será

$$\begin{aligned} &|\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle \\ &= -\frac{1}{2}e^{+it/\hbar}|e_{-1}\rangle + \frac{1}{2}e^{-it/\hbar}\left|e_{+1}^{(1)}\right\rangle + \frac{1}{2}e^{-it/\hbar}\left|e_{+1}^{(2)}\right\rangle + \frac{1}{2}e^{-3it/\hbar}|e_{+3}\rangle\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Estudiemos ahora el otro caso que nos pide el inciso. Si a $t = 0$ se mide el operador A y se obtiene +2a, nuestro estado inicial será el que calculamos previamente en el inciso **(b)**, es decir, $|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|u_3\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}(|u_1\rangle + |u_4\rangle)$. Procediendo del mismo modo que antes, debemos expresar este estado en la base de energía para lo cual necesitamos calcular los productos internos:

$$\begin{aligned} &\langle e_{-1}|\psi(0)\rangle = 0 \quad \left\langle e_{+1}^{(1)}\middle|\psi(0)\right\rangle = 1/\sqrt{3} \\ &\left\langle e_{+1}^{(2)}\middle|\psi(0)\right\rangle = -i/\sqrt{3} \quad \langle e_{+3}|\psi(0)\rangle = 1/\sqrt{3} \\ &\implies |\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|e_{+1}^{(1)}\right\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}\left|e_{+1}^{(2)}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|e_{+3}\rangle \\ &\implies |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{-it/\hbar}\left|e_{+1}^{(1)}\right\rangle - ie^{-it/\hbar}\left|e_{+1}^{(2)}\right\rangle + e^{-3it/\hbar}|e_{+3}\rangle\right). \end{aligned} \tag{20}$$

**(d)** En este inciso, el estado inicial desde el cual partimos no es puro sino que es mixto:

$$\rho(0) = \frac{1}{2}\Big( |u_1\rangle \langle u_1| + |u_3\rangle \langle u_3| \Big) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Es sencillo mostrar que este estado satisface todas las propiedades de una matriz densidad auténtica. Tal como nos indican los postulados, las probabilidades de medir los autovalores de H se calculan como el valor medio del proyector asociado, es decir,

$$\begin{aligned} P(-\hbar\omega_0|\rho) &= \mathrm{Tr}[|e_{-1}\rangle \langle e_{-1}| \rho] = 1/4 \\ P(+3\hbar\omega_0|\rho) &= \mathrm{Tr}[|e_{+3}\rangle \langle e_{+3}| \rho] = 1/4 \\ P(+\hbar\omega_0|\rho) &= \mathrm{Tr}\Big[\Big( \Big|e_{+1}^{(1)}\Big\rangle \Big\langle e_{+1}^{(1)}\Big| + \Big|e_{+1}^{(2)}\Big\rangle \Big\langle e_{+1}^{(2)}\Big| \Big)\rho\Big] = 1/2 \end{aligned} \tag{22}$$

Por último, el valor medio se calcula como

$$\begin{aligned} \langle H\rangle &= \mathrm{Tr}(\rho H) = \hbar\omega_0 \\ \langle H^2\rangle &= \mathrm{Tr}\big(\rho H^2\big) = 3\hbar^2\omega_0^2, \end{aligned} \tag{23}$$

y consecuentemente la varianza nos queda

$$\mathrm{Var}(H) = \mathrm{Tr}\big(\rho H^2\big) - \mathrm{Tr}(\rho H)^2 = 3\hbar^2\omega_0^2 - \hbar^2\omega_0^2 = 2\hbar^2\omega_0^2. \tag{24}$$

# Física Teórica 2 - Primer Parcial - Problema 3

## Ejercicio 3

El Hamiltoniano está dado por

$$H = \hbar\omega_0 \left[ \left( a_1^\dagger a_1 + \frac{1}{2} \right) + \left( a_2^\dagger a_2 + \frac{1}{2} \right) - u \left( a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger \right) \right], \tag{1}$$

o bien,

$$H = \hbar\omega_0 \left[ n_1 + n_2 + 1 - u \left( s_+ + s_- \right) \right], \tag{2}$$

donde

$$n_i = a_i^\dagger a_i, \;\; s_+ = a_1 a_2^\dagger, \;\; s_- = a_1^\dagger a_2. \tag{3}$$

a) En este ítem se tiene que

$$\begin{gathered} [N, H] = \hbar\omega_0 \left[ N, n_1 + n_2 + 1 - u \left( s_+ + s_- \right) \right] = \hbar\omega_0 \left[ N, N + 1 - u \left( s_+ + s_- \right) \right] = -u\hbar\omega_0 \left( [N, s_+] + [N, s_-] \right) \\ = -u\hbar\omega_0 \left( [n_1, s_+] + [n_2, s_+] + [n_1, s_-] + [n_2, s_-] \right) = -u\hbar\omega_0 \left( \left[ a_1^\dagger a_1, a_1 a_2^\dagger \right] + \left[ a_2^\dagger a_2, a_1 a_2^\dagger \right] + \left[ a_1^\dagger a_1, a_1^\dagger a_2 \right] + \left[ a_2^\dagger a_2, a_1^\dagger a_2 \right] \right) \\ = -u\hbar\omega_0 \left( \left[ a_1^\dagger a_1, a_1 \right] a_2^\dagger + a_1 \left[ a_2^\dagger a_2, a_2^\dagger \right] + \left[ a_1^\dagger a_1, a_1^\dagger \right] a_2 + a_1^\dagger \left[ a_2^\dagger a_2, a_2 \right] \right) \\ = -u\hbar\omega_0 \left( \left[ a_1^\dagger, a_1 \right] a_1 a_2^\dagger + a_1 a_2^\dagger \left[ a_2, a_2^\dagger \right] + a_1^\dagger \left[ a_1, a_1^\dagger \right] a_2 + a_1^\dagger \left[ a_2^\dagger, a_2 \right] a_2 \right) = -u\hbar\omega_0 \left( -a_1 a_2^\dagger + a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2 \right) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Además,

$$N \left| n_1, n_2 \right\rangle = \left( n_1 + n_2 \right) \left| n_1, n_2 \right\rangle \tag{5}$$

y por lo tanto, la degeneración para $N = q$ está dada por la cantidad de numeros naturales incluido el cero tales que $n_1 + n_2 = q$. Luego, $0 \leq n_1 \leq q$, $n_2 = q - n_1$ y por lo tanto la degeneración es $q + 1$.

b) Solo hay dos autoestados correspondientes a $N = 1$ que son el $|01\rangle$ y el $|10\rangle$. Luego, para calcular los autovalores y autoestados de $H$ para $N = 1$, basta con calcular los elementos de matriz del Hamiltoniano dentro de ese subespacio. En efecto,

$$\begin{gathered} H \left| 10 \right\rangle = \hbar\omega_0 \left[ N \left| 10 \right\rangle + \left| 10 \right\rangle - u \left( s_+ \left| 10 \right\rangle + s_- \left| 10 \right\rangle \right) \right] = \hbar\omega_0 \left[ \left| 10 \right\rangle + \left| 10 \right\rangle - u \left( a_1 \left| 1 \right\rangle \otimes a_2^\dagger \left| 0 \right\rangle + a_1^\dagger \left| 1 \right\rangle \otimes a_2 \left| 0 \right\rangle \right) \right] \\ = \hbar\omega_0 \left( 2 \left| 10 \right\rangle - u \left| 01 \right\rangle \right) \end{gathered} \tag{6}$$

y analogamente

$$H \left| 01 \right\rangle = \hbar\omega_0 \left( 2 \left| 01 \right\rangle - u \left| 10 \right\rangle \right). \tag{7}$$

Esto implica que la matriz del Hamiltoniano correspondiente a ese subespacio está dada por

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 2 & -u \\ -u & 2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Su autovalores son

$$\epsilon_\pm = \hbar\omega_0 \left( 2 \mp u \right) \tag{9}$$

mientras que sus autoestados son

$$\left| \psi_\pm \right\rangle = \frac{\left| 10 \right\rangle \pm \left| 01 \right\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

Se vió en clase que estos estados son entrelazados.

c) Dado un estado

$$\left| \psi \right\rangle = \frac{\left| 01 \right\rangle - \imath \left| 10 \right\rangle}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

se tiene que

$$\rho = \left| \psi \right\rangle \left\langle \psi \right| = \frac{1}{2} \left( \left| 01 \right\rangle \left\langle 01 \right| - \imath \left| 10 \right\rangle \left\langle 01 \right| + \imath \left| 01 \right\rangle \left\langle 10 \right| + \left| 10 \right\rangle \left\langle 10 \right| \right). \tag{12}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\rho_1 = \mathrm{tr}_1\rho &= \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{tr}_1\left(|01\rangle\langle 01|\right) - \imath\mathrm{tr}_1\left(|10\rangle\langle 01|\right) + \imath\mathrm{tr}_1\left(|01\rangle\langle 10|\right) + \mathrm{tr}_1\left(|10\rangle\langle 10|\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{tr}_1\left(|01\rangle\langle 01|\right) + \mathrm{tr}_1\left(|10\rangle\langle 10|\right)\right] = \tfrac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right) = \tfrac{1}{2}\mathbb{I}\end{aligned} \tag{13}$$

y analogamente

$$\rho_2 = \mathrm{tr}_2\rho = \frac{1}{2}\mathbb{I}. \tag{14}$$

Por lo tanto,

$$\langle n_1\rangle = \mathrm{tr}\left(\rho_1 n_1\right) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(n_1\right) = \frac{1}{2}\left(\langle 0| a_1^\dagger a_1 |0\rangle + \langle 1| a_1^\dagger a_1 |1\rangle\right) = \frac{1}{2}\langle 1| a_1^\dagger a_1 |1\rangle = \frac{1}{2} \tag{15}$$

y analogamente

$$\langle n_2\rangle = \mathrm{tr}\left(\rho_2 n_2\right) = \frac{1}{2}. \tag{16}$$

d) De la misma manera que en el ítem a, se puede ver que

$$[n_1, H] = u\hbar\omega_0\left(s_+ - s_-\right), \tag{17}$$

$$[n_2, H] = u\hbar\omega_0\left(s_- - s_+\right), \tag{18}$$

$$[s_+, H] = u\hbar\omega_0\left(n_2 - n_1\right), \tag{19}$$

$$[s_-, H] = u\hbar\omega_0\left(n_1 - n_2\right). \tag{20}$$

Por lo tanto,

$$\dot{n}_1 = \imath u\omega_0\left(s_- - s_+\right), \tag{21}$$

$$\dot{n}_2 = \imath u\omega_0\left(s_+ - s_-\right), \tag{22}$$

$$\dot{s}_+ = \imath u\omega_0\left(n_1 - n_2\right), \tag{23}$$

$$\dot{s}_- = \imath u\omega_0\left(n_2 - n_1\right). \tag{24}$$

Llamando

$$N = n_1 + n_2,\ \Delta n = n_1 - n_2, \tag{25}$$

$$S = s_+ + s_-,\ \Delta s = s_+ - s_-, \tag{26}$$

y sumando y restando las ecuaciones se puede ver que

$$\dot{N} = \dot{S} = 0, \tag{27}$$

$$\Delta\dot{n} = -2\imath u\omega_0\Delta s, \tag{28}$$

$$\Delta\dot{s} = 2\imath u\omega_0\Delta n. \tag{29}$$

Las primera de las ecuaciones implica que $N$ y $S$ son constantes mientras que las dos últimas implican

$$\Delta\ddot{n} = -2\imath u\omega_0\Delta\dot{s} = 4u^2\omega_0^2\Delta n \Rightarrow \Delta n = A\cosh\left(2u\omega_0 t\right) + B\sinh\left(2u\omega_0 t\right), \tag{30}$$

$$\Delta s = \frac{\imath\Delta\dot{n}}{2u\omega_0} = \imath\left[B\cosh\left(2u\omega_0 t\right) + A\sinh\left(2u\omega_0 t\right)\right]. \tag{31}$$

Juntando todo se obtiene finalmente

$$N\left(t\right) = N\left(0\right), \tag{32}$$

$$S\left(t\right) = S\left(0\right), \tag{33}$$

$$\Delta n\left(t\right) = \Delta n\left(0\right)\cosh\left(2u\omega_0 t\right) - \imath\Delta s\left(0\right)\sinh\left(2u\omega_0 t\right), \tag{34}$$

$$\Delta s\left(t\right) = \left[\Delta s\left(0\right)\cosh\left(2u\omega_0 t\right) + \imath\Delta n\left(0\right)\sinh\left(2u\omega_0 t\right)\right]. \tag{35}$$

Habiendo hecho esto, se pueden obtener los operadores originales en términos de estos últimos

$$n_1 = \frac{N + \Delta n}{2},\ n_2 = \frac{N - \Delta n}{2}, \tag{36}$$

$$s_+ = \frac{S + \Delta s}{2},\ s_- = \frac{S - \Delta s}{2}. \tag{37}$$