Física Teórica 2 – Primer cuatrimestre de 2021

Entrega Guía 9: Teoría de perturbaciones

Justifique claramente todas sus respuestas.

Modelo de Jaynes–Cummings más allá de la aproximación de onda rotante

En la Guía de problemas sobre CQED estudiamos el modelo de Jaynes–Cummings de la interacción de un átomo con una cavidad mono modo. En este modelo, consideramos el átomo como un sistema de dos niveles efectivos $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ con $E_g < E_e$, de forma tal que el Hamiltoniano del átomo se puede escribir como

$$H_{\mathrm{A}} = \frac{\hbar\omega_a}{2}\sigma_z,$$

con $\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ y $\hbar\omega_a = E_e - E_g$. Por otro lado, el modo fundamental de la cavidad cavidad tiene frecuencia ω_c de forma que el Hamiltoniano de este único modo del campo electromagnético es

$$H_{\mathrm{C}} = \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right).$$

En la aproximación dipolar, el átomo interactúa con el modo del campo eléctrico a través de su momento dipolar $\boldsymbol{d}$, de forma tal que tenemos un término de interacción dado por

$$H_{\mathrm{int}} = -\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E} = -i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_- + \sigma_+\right)\otimes\left(a - a^\dagger\right).$$

Bajo la aproximación de onda rotante, esta interacción se aproxima por

$$H_{\mathrm{RWA}} = -i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_+\otimes a - \sigma_-\otimes a^\dagger\right).$$

Más allá de que la aproximación de onda rotante es una buena aproximación para muchos de los regímenes de operación que se alcanzan en los experimentos, es esencial para tener un tratamiento analítico del problema en cuanto el Hamiltoniano con el término de interacción dipolar completo no es resoluble analíticamente. A continuación nos proponemos analizar el efecto del término de interacción de forma perturbativa y así también estudiar cómo surge la aproximación de onda rotante.

Caso 1: Teoría de perturbaciones independientes del tiempo

En primer lugar utilizaremos la teoría de perturbaciones independientes del tiempo. Para ello, consideraremos que el Hamiltoniano de interacción dipolar H_{int} es una perturbación que se agrega al Hamiltoniano libre del átomo y cavidad, $H_0 = H_{\mathrm{A}} + H_{\mathrm{C}}$.

(a) En primer lugar, supondremos además que $\omega_c/\omega_a \notin \mathbb{Q}$ (es decir no son uno un múltiplo entero del otro). En tal caso, utilizando teoría de perturbaciones independientes del tiempo

  (i) encuentre los autoestados de energía a primer orden en Ω, y

  (ii) calcule las energías a segundo orden en Ω.

  ¿Qué condiciones tiene que pedir sobre Ω, ω_a y ω_c para que el desarrollo perturbativo sea consistente?

(b) Compare e interprete los resultados del ítem anterior en términos de los resultados analíticos del Hamiltoniano de Jaynes–Cummings en la aproximación de onda rotante.

(c) Supongamos ahora que $\omega_a = \omega_c$ (¿qué situación es esta?). En tal caso, ¿cuáles son las energías del fundamental y del primer excitado de H_0? ¿Hay degeneración? Calcule ahora perturbativamente el autoestado *del primer excitado* a orden cero y la energía a primer orden en Ω.

Caso 2: Teoría de perturbaciones dependientes del tiempo

Estudiemos ahora el efecto de la interacción dipolar completa utilizando teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. Para ello, supongamos que inicialmente el sistema átomo y cavidad se encuentra en el estado $|e, n\rangle$ (átomo excitado y n fotones en la cavidad) y a tiempo $t = 0$ el átomo entra en la cavidad, de forma tal que el Hamiltoniano libre $H_0 = H_\mathrm{A} + H_\mathrm{C}$ es perturbado por la interacción dipolar H_int.

(a) Determine qué transiciones a otros autoestados de H_0 son posibles a primer orden en teoría de perturbaciones dependiente del tiempo.

(b) Calcule cada una de las probabilidades de transición obtenidas en el ítem anterior. ¿Qué condición tiene que pedir sobre los parámetros del Hamiltoniano para que el desarrollo perturbativo sea consistente? Calcule además la probabilidad de que el átomo decaiga al estado fundamental a primer orden en teoría de perturbaciones.

(c) Analice e interprete los resultados del ítem anterior en el caso particular en que $\omega_a = \omega_c$.

(d) Compare e interprete los resultados obtenidos en el ítem (b) con los resultados analíticos del Hamiltoniano de Jaynes–Cummings en la aproximación de onda rotante.