Física Teórica 2 - Guía 8: Partículas Idénticas

Federico Petrovich

6 de julio de 2021

Problema 8

En el ítem a, el hamiltoniano de una partícula es el de una caja en el intervalo $[0, L]$ y por ende las autofunciones y las autoenergías están dadas por

$$\langle x|ns\rangle = \psi_{ns}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2,\ n \geq 1, \tag{1}$$

donde s es el spin y toma valores de $\uparrow$ o $\downarrow$.

Considerando ahora las dos particulas, como son fermiones y no hay término de interacción, los autoestados del Hamiltoniano total están dados por

$$|n_1 s_1; n_2 s_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n_1 s_1\rangle \otimes |n_2 s_2\rangle - |n_2 s_2\rangle \otimes |n_1 s_1\rangle\right) \tag{2}$$

mientras que las energías por

$$E_{n_1 n_2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2\right). \tag{3}$$

El estado fundamental se obtiene tomando $n_1 = n_2 = 1$. Como los dos valores de n son iguales, los dos valores de s deben ser distintos (principio de Exclusión de Pauli) y como se trara de fermiones (y ambos están en el mismo nivel) es equivalente tomar $s_1 =\uparrow$, $s_2 =\downarrow$ o $s_1 =\downarrow$, $s_2 =\uparrow$ (la función de onda solo cambia de signo ante estas dos opciones y por ende la física es la misma). En resumen, el autoestado del fundamental está dado por

$$|\psi_{11}\rangle = |1\uparrow; 1\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\uparrow\rangle \otimes |1\downarrow\rangle - |1\downarrow\rangle \otimes |1\uparrow\rangle\right) = |11\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right). \tag{4}$$

mientras que la energía por

$$E_{11} = \frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}. \tag{5}$$

En cuanto al primera excitado, se obtiene tomando $n_1 = 1$, $n_2 = 2$ (o viceversa pero como se trata de particulas identicas da igual). Ahora no hay ninguna restricción para los valores de s y por ende hay cuatro autoestados posibles que son

$$|1\uparrow; 2\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\uparrow\rangle \otimes |2\uparrow\rangle - |2\uparrow\rangle \otimes |1\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle - |21\rangle\right) \otimes \left(|\uparrow\uparrow\rangle\right), \tag{6}$$

$$|1\downarrow; 2\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\downarrow\rangle \otimes |2\downarrow\rangle - |2\downarrow\rangle \otimes |1\downarrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle - |21\rangle\right) \otimes \left(|\downarrow\downarrow\rangle\right), \tag{7}$$

$$|1\uparrow; 2\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\uparrow\rangle \otimes |2\downarrow\rangle - |2\downarrow\rangle \otimes |1\uparrow\rangle\right), \tag{8}$$

$$|1\downarrow; 2\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\downarrow\rangle \otimes |2\uparrow\rangle - |2\uparrow\rangle \otimes |1\downarrow\rangle\right). \tag{9}$$

Como los último dos no se pueden escribir como un producto entre la parte espacial y la de spin, conviene construir una combinación lineal de ambos de forma tal que los cuatro autoestados sean

$$\left|\psi_{12}^{(1)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle - |21\rangle\right) \otimes \left(|\uparrow\uparrow\rangle\right), \tag{10}$$

$$\left|\psi_{12}^{(2)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle - |21\rangle\right) \otimes \left(|\downarrow\downarrow\rangle\right). \tag{11}$$

$$\left|\psi_{12}^{(3)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle - |21\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right), \tag{12}$$

$$\left|\psi_{12}^{(4)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle + |21\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right). \tag{13}$$

La energía está dada por

$$E_{12} = \frac{5}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}. \tag{14}$$

En el ítem b, se agrega un potencial de interacción de forma tal de que el Hamiltoniano se escribe como

$$H = H_0 + \epsilon W, \tag{15}$$

donde H_0 es el hamiltoniano del ítem anterior y $\epsilon = 1$ es el parametro perturbativo.

Para el estado fundamental, como no está degenerado, la correción a la energía viene dada simplemente por

$$\begin{aligned} E^{(1)} = \langle\psi_{11}| W |\psi_{11}\rangle = \langle 11| W |11\rangle = -V_0 \textstyle\int dx_1 dx_2 \psi_1^*(x_1)\,\psi_1^*(x_2)\,\delta(x_1 - x_2)\,\psi_1(x_1)\,\psi_1(x_2) \\ = -V_0 \textstyle\int dx_1 \left|\psi_1(x_1)\right|^4 = -V_0 \frac{4}{L^2}\int_0^L \sin^4\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx = -V_0\frac{4}{L}\int_0^1 \sin^4(\pi u)\,du = -V_0\frac{4}{L}\frac{3}{8} = -\frac{3V_0}{2L}. \end{aligned} \tag{16}$$

Para el primer excitado, hay que calcular la matriz W restringida al subespacio generado por los $\left|\psi_{12}^{(k)}\right\rangle$. Como estos estados se escriben como producto entre la parte espacial y la de spin, W no depende del spin, y la base

$$B = \left\{ |\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \right\} \tag{17}$$

es ortonormal, esta matriz W restringida es diagonal. Sus elementos son

$$\begin{aligned} W_{11} = W_{22} = W_{33} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 12| - \langle 21|\right) W \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle - |21\rangle\right) \\ = \tfrac{1}{2}\left(\langle 12| W |12\rangle - \langle 12| W |21\rangle - \langle 21| W |21\rangle + \langle 21| W |21\rangle\right) = J - K, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} W_{44} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 12| + \langle 21|\right) W \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle + |21\rangle\right) \\ = \tfrac{1}{2}\left(\langle 12| W |12\rangle + \langle 12| W |21\rangle + \langle 21| W |21\rangle + \langle 21| W |21\rangle\right) = J + K, \end{aligned} \tag{19}$$

donde

$$J = \langle 12| W |12\rangle = \langle 21| W |21\rangle \tag{20}$$

y

$$K = \langle 12| W |21\rangle = \langle 21| W |12\rangle. \tag{21}$$

Resolviendo se tiene que

$$\begin{aligned} J = -V_0 \textstyle\int dx_1 dx_2 \psi_1^*(x_1)\,\psi_2^*(x_2)\,\delta(x_1 - x_2)\,\psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2) = -V_0\int dx_1 \left|\psi_1(x_1)\right|^2 \left|\psi_2(x_1)\right|^2 \\ = -V_0\frac{4}{L^2}\textstyle\int dx \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = -V_0\frac{4}{L}\int_0^1 \sin^2(\pi u)\sin^2(2\pi u)\,du = -V_0\frac{4}{L}\frac{1}{4} = -\frac{V_0}{L}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$K = -V_0\int dx_1 dx_2 \psi_1^*(x_1)\,\psi_2^*(x_2)\,\delta(x_1 - x_2)\,\psi_2(x_1)\,\psi_1(x_2) = -V_0\int dx_1 \left|\psi_1(x_1)\right|^2\left|\psi_2(x_1)\right|^2 = J = -\frac{V_0}{L}. \tag{23}$$

Por lo tanto,

$$W_{11} = W_{22} = W_{33} = 0 \tag{24}$$

y

$$W_{44} = -\frac{2V_0}{L}. \tag{25}$$

Se tiene entonces que se rompe parcialmente la degeneración en la energía $E_{12} = \frac{5}{2}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$, que ahora pasa a estar tres veces degenerada con autoestados $\left|\psi_{12}^{(1)}\right\rangle$, $\left|\psi_{12}^{(2)}\right\rangle$ y $\left|\psi_{12}^{(3)}\right\rangle$. La otra energía pasa a ser $E_{12} - \frac{2V_0}{L}$ con autoestado $\left|\psi_{12}^{(4)}\right\rangle$.

Por último, si las parciulas son distinguibles, el estado fundamental está 4 veces degenerado siendo $|11\rangle \otimes |\uparrow\uparrow\rangle$, $|11\rangle \otimes |\uparrow\downarrow\rangle$, $|11\rangle \otimes |\downarrow\uparrow\rangle$, $|11\rangle \otimes |\downarrow\downarrow\rangle$ los autoestados. La matriz reducida W es diagonal, y más aún, es un multiplo de la identidad ya que sus elementos diagonales son todos iguales y valen $\langle 11| W |11\rangle = -\frac{3V_0}{2L}$. Por lo tanto, el estado fundamental sigue estando 4 veces degenerado y la corrección a la energía es la misma de antes.

En cuanto al primer excitado, ahora está 8 veces degenerado teniendo de autoestados a $|12\rangle \otimes |s_1 s_2\rangle$ y $|21\rangle \otimes |s_1 s_2\rangle$ ($|s_1 s_2\rangle$ puede tomar 4 valores posibles).