Física Teórica 2

Guía 10: Partículas idénticas

Problema 5

Mateo Koifman

6 de julio de 2021

Problema 5

P5 Demuestre que dos fermiones idénticos en una misma órbita y con igual impulso angular $j_1 = j_2 = j$, sólo se pueden acoplar a impulso angular total J tal que $2j + J$ sea impar. Use la antisimetría de la función de onda, o sea $\phi(j^2, m, m') = -\phi(j^2, m', m)$ y la propiedad de los Clebsch-Gordan

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | JM \rangle .$$

El estado de las dos partículas con J, M definido es

$$|\Psi\rangle = |R\rangle \otimes |JM\rangle$$

Como ambas partículas se encuentran en la misma órbita, la parte espacial $|R\rangle$ es par.
Veamos qué sucede con la parte angular.
Como son fermiones, la mecánica cuántica impone que $|\Psi\rangle$, y por ende $|JM\rangle$, sean impares

Veamos la acción sobre $|JM\rangle$ al permutar las partículas

$$|JM\rangle = \sum_{m_1,m_2} \langle m_1 m_2|JM\rangle \, |m_1 m_2\rangle$$

$$P_{12}\, |JM\rangle = \sum_{m_1,m_2} \langle m_1 m_2|JM\rangle \, |m_2 m_1\rangle$$

Usando la propiedad de los CG

$$P_{12}\, |JM\rangle = \sum_{m_1,m_2} (-1)^{2j+J} \langle m_2 m_1|JM\rangle \, |m_2 m_1\rangle$$

$$P_{12}\, |JM\rangle = (-1)^{2j+J} \, |JM\rangle$$

$P_{12}\, |JM\rangle = -\, |JM\rangle \quad \Leftrightarrow \quad 2j + J$ es impar.
En este caso, $2j$ es impar, por lo tanto J debe ser par.

Verifiquemos entonces que para un estado general

$$|\Psi\rangle = |R\rangle \otimes \left(\sum_{JM} c_{JM} \, |JM\rangle \right)$$

$$P_{12} \, |\Psi\rangle = (+1) \, |R\rangle \otimes \left(\sum_{JM} (-1)^{2j+J} c_{JM} \, |JM\rangle \right)$$

$$P_{12} \, |\Psi\rangle = - \left[|R\rangle \otimes \left(\sum_{JM} c_{JM} \, |JM\rangle \right) \right] = - \, |\Psi\rangle$$

asumiendo que todos los J cumplan $2j + J \in \mathrm{impar}$.