Física Teórica II

Guía 10: Partículas idénticas

Nicolás Mirkin

06 de julio de 2021

Problema VII

P7 **"Interacción" de intercambio: "repulsión" y "atracción" de partículas cuánticas idénticas.** Considere dos partículas y sea $D = \left\langle (x_1 - x_2)^2 \right\rangle$ la distancia cuadrática media entre las partículas, con x_1 y x_2 la posición de cada partícula. Supongamos que las partículas están en dos estados ortogonales $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Calcule entonces la distancia cuadrática media en los casos en que

(a) La partículas son distinguibles.

(b) Las partículas son bosones indistinguibles.

(c) Las partículas son fermiones indistinguibles.

Compare los resultados e interprete.

(a) Partículas distinguibles: No importa la simetrización.

El estado será: $|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \rightarrow \langle x_1, x_2 \mid \psi\rangle = \alpha(x_1)\,\beta(x_2)$

Calculo la distancia cuadrática media en este estado:

$$\mathrm{D}=\left\langle \psi \left| \hat{D} \right| \psi \right\rangle = \int dx_1 dx_2 \left\langle \psi \left| \hat{D} \right| x_1, x_2 \right\rangle \langle x_1, x_2 \mid \psi \rangle$$

$$=\int dx_1 dx_2\, (x_1 - x_2)^2 \left|\alpha(x_1)\,\beta(x_2)\right|^2$$

$$=\int dx_1 dx_2 \left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2\right) \left|\alpha(x_1)\,\beta(x_2)\right|^2$$

$$=\int dx_1 dx_2 x_1^2 \left|\alpha(x_1)\,\beta(x_2)\right|^2 + \ldots = \left\langle x^2 \right\rangle_\alpha + \ldots$$

$$=\left\langle x^2 \right\rangle_\alpha + \left\langle x^2 \right\rangle_\beta - 2\langle x\rangle_\alpha \langle x\rangle_\beta$$

(b) y (c) Partículas bosónicas y fermiónicas.

Importa la simetrización. Los estados serán:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \pm |\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle)$$

$$\to \langle x_1, x_2 \mid \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\left(x_1\right)\beta\left(x_2\right) \pm \beta\left(x_1\right)\alpha\left(x_2\right)\right)$$

Calculo la distancia cuadrática media en estos estados:

$$\mathrm{D}=\left\langle\psi\left|\hat{D}\right|\psi\right\rangle = \int dx_1 dx_2 \left\langle\psi\left|\hat{D}\right|x_1, x_2\right\rangle \langle x_1, x_2 \mid \psi\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\int dx_1 dx_2 \underbrace{\left(x_1 - x_2\right)^2}_{\left(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\right)} \left[\alpha\left(x_1\right)\beta\left(x_2\right) \pm \beta\left(x_1\right)\alpha\left(x_2\right)\right]\left[\alpha\left(x_1\right)\beta\left(x_2\right) \pm \beta\left(x_1\right)\alpha\left(x_2\right)\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\int dx_1 dx_2 \left(x_1^2 +\right.} \boxed{x_2^2} \left.- 2x_1x_2\right)\left(\boxed{|\alpha\left(x_1\right)\beta\left(x_2\right)|^2} + \boxed{|\beta\left(x_1\right)\alpha\left(x_2\right)|^2} \pm 2\alpha\left(x_1\right)\beta\left(x_2\right)\beta\left(x_1\right)\alpha\left(x_2\right)\right)$$

$$= \boxed{\left\langle x^2\right\rangle_\alpha} + \left\langle x^2\right\rangle_\beta - 2\langle x\rangle_\alpha\langle x\rangle_\beta \mp 2\underbrace{\int dx_1 dx_2 x_1 x_2 \alpha\left(x_1\right)\alpha\left(x_2\right)\beta\left(x_1\right)\beta\left(x_2\right)}_{\text{integral de intercambio} \quad >0}$$

– bosones y + fermiones

Distancia cuadrática media:

$$\mathrm{D}=\left\langle \psi \middle| \hat{D} \middle| \psi \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle_\alpha + \left\langle x^2 \right\rangle_\beta - 2\langle x\rangle_\alpha \langle x\rangle_\beta \mp 2 \underbrace{\int dx_1 dx_2 x_1 x_2 \alpha(x_1)\,\alpha(x_2)\,\beta(x_1)\,\beta(x_2)}_{\text{integral de intercambio} \quad >0}$$

en donde el – es para bosones y el + para fermiones.

<u>Comentarios:</u>

- Si las partículas son bosones, tienden a estar más cerca en promedio y si son fermiones tienden a alejarse.
- No hay ninguna “fuerza” que genere este efecto, es un efecto puramente estadístico.
- Algunos ejemplos: condensados de bose-einstein (todas las partículas juntas en el mismo estado) o la presión cuántica que hace que una estrella de neutrones no colalpse en un agujero negro.