Física Teórica II

Guía 9: Perturbaciones

Nicolás Mirkin

29 de junio de 2021

Problema XII

Enunciado: Tenemos un átomo de Hidrógeno en el fundamental y a t=0 se enciende una perturbación:

$$\mathrm{V(t)} = \text{-e}\left(ax - b\left(3z^2 - r^2\right)\right)\sin(\omega t)$$

¿Qué transiciones |1,0,0>→|n,l,m> son posibles si consideramos teoría de perturbaciones a primer orden?

Necesitamos que: $c_{nlm}^{(1)}(t) \neq 0 \Longrightarrow \langle n,l,m|V(t)|1,0,0\rangle \neq 0$ tenemos:

$$\langle n,l,m|V(t)|1,0,0\rangle = -e\left(a\langle n,l,m|x|1,0,0\rangle - b\left\langle n,l,m\left|\left(3z^2 - r^2\right)\right|1,0,0\right\rangle\right)\sin(\omega t)$$

Vamos a usar el teorema de **Wigner-Eckart** para ver cuáles son cero.

Recordemos que: $\mathrm{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{-1}^{(1)} - T_1^{(1)})$ y además: $\text{3z-r}^2 = T_0^{(2)}$

Por lo tanto: $\langle n,l,m|V(t)|1,0,0\rangle = -e\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\left\langle n,l,m\left|T_{-1}^{(1)}\right|1,0,0\right\rangle - \frac{a}{\sqrt{2}}\left\langle n,l,m\left|T_1^{(1)}\right|1,0,0\right\rangle\right.$

$\left.\text{-b}\left\langle n,l,m\left|T_0^{(2)}\right|1,0,0\right\rangle\right)\sin(\omega t)$

Con esta expresión, recordemos WE y veamos las reglas de selección de los tres términos que nos quedaron.

Teorema de Wigner-Eckart: $\left\langle \alpha', j', m' \left| T_q^{(k)} \right| \alpha, j, m \right\rangle = \langle j, k; m, q \mid j', m' \rangle \, T_{\alpha',\alpha}^{k,j',j}$

donde ⟨j,k;m,q|j′,m′⟩ es el coeficiente de Clebsch-Gordan que surge de sumar momentos angulares j y k con proyecciones m y q para obtener un momento angular total j′ con proyección m′. Y además:

$\mathrm{T}_{\alpha',\alpha}^{k,j',j} = \left\langle \alpha', j' \left\| T^{(k)} \right\| \alpha, j \right\rangle$ (no depende de m, m′ ni q)

Los coeficientes de CG nos dan reglas de selección, pues son todos cero a menos que: m+q=m' y también: |j-k| < j' < j+k .

1. El primer término era: $\left\langle n, l, m \left| T_{-1}^{(1)} \right| 1, 0, 0 \right\rangle = \langle 0, 1; 0, -1 \mid l, m \rangle \left\langle n, l \left\| T^{(1)} \right\| 1, 0 \right\rangle$

Para que sea no nulo necesitamos que:
(a) 0−1=m, es decir que m=−1.
(b) |0−1| ≤ l ≤ 0+1, es decir que l=1.

El primer término solo permite transiciones a los estados |n,1,−1>, con n≥2.

---

2. El segundo término era: $\left\langle n, l, m \left| T_{1}^{(1)} \right| 1, 0, 0 \right\rangle = \langle 0, 1; 0, 1 \mid l, m \rangle \left\langle n, l \left\| T^{(1)} \right\| 1, 0 \right\rangle$

Para que sea no nulo necesitamos que:
(a) 0+1=m, es decir que m=1.
(b) |0−1| ≤ l ≤ 0+1, es decir que l=1.

El segundo término solo permite transiciones a los estados |n,1,1>, con n≥2.

3. El tercer término era: $\left\langle n,l,m\left|T_0^{(2)}\right|1,0,0\right\rangle = \langle 0,2;0,0\mid l,m\rangle\,\langle n,l\,\|T^{(2)}\|\,1,0\rangle$

Para que sea no nulo necesitamos que:
(a) 0+0=m, es decir que m=0.
(b) |0−2| ≤ l ≤ 0+2, es decir que l=2.

El tercer término solo permite transiciones a los estados |n,2,0>, con n≥3.

Combinando las 3 contribuciones, solo podremos tener transiciones a los estados:

$$\{|\,n,1,-1\rangle, n\geq 2\}\cup\{|n,1,1\rangle, n\geq 2\}\cup\{|n,2,0\rangle, n\geq 3\}$$

Pasemos ahora a calcular las respectivas probabilidades de transición

$$c_{nlm}^{(1)}(t)=\frac{1}{i\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t' e^{i(E_{nlm}-E_{100})t'/\hbar}\langle nlm\,|V\,(t')|\,100\rangle=\frac{1}{i\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t' e^{i(E_n-E_1)t'/\hbar}\langle nlm\,|V\,(t')|\,100\rangle$$

$$=-\frac{e}{i\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t' e^{i(E_n-E_1)t'/\hbar}\left(a\langle nlm|x|100\rangle-b\left\langle nlm\left|\left(3z^2-r^2\right)\right|100\right\rangle\right)\sin\left(\omega t'\right)$$

$$=-\frac{e}{i\hbar}\left(a\langle nlm|x|100\rangle-b\left\langle nlm\left|\left(3z^2-r^2\right)\right|100\right\rangle\right)\underbrace{\int_0^t \mathrm{d}t' e^{-i\left(1/n^2-1\right)t'\mathrm{Ry}/\hbar}\sin\left(\omega t'\right)}_{f(t)\ \text{(ver ayuda P9)}}$$

$$=-\frac{e}{i\hbar}\left(a\langle nlm|x|100\rangle-b\left\langle nlm\left|\left(3z^2-r^2\right)\right|100\right\rangle\right)f(t)$$

$$=-\frac{e}{i\hbar}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\left\langle nlm\left|T_{-1}^{(1)}\right|100\right\rangle-\frac{a}{\sqrt{2}}\left\langle nlm\left|T_1^{(1)}\right|100\right\rangle-b\left\langle nlm\left|T_0^{(2)}\right|100\right\rangle\right)f(t)$$

Los elementos de matriz que aparecen son no nulos en los casos que vimos antes. Separamos los tres casos. Para los estados finales {|n,2,0>, n≥3}:

$$c^{(1)}_{n20}(t) = -\frac{e}{i\hbar}\Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\underbrace{\left\langle n20\left|T^{(1)}_{-1}\right|100\right\rangle}_{0} - \frac{a}{\sqrt{2}}\underbrace{\left\langle n20\left|T^{(1)}_{1}\right|100\right\rangle}_{0} - b\underbrace{\left\langle n20\left|T^{(2)}_{0}\right|100\right\rangle}_{\langle 0,2;0,0|2,0\rangle\left\langle n,2\left\|T^{(2)}\right\|1,0\right\rangle}\Big)f(t)$$

$$= \frac{eb}{i\hbar}\underbrace{\langle 0,2;0,0\mid 2,0\rangle}_{\text{tabla CG}}\left\langle n,2\left\|T^{(2)}\right\|1,0\right\rangle f(t),$$

y la probabilidad de transición es:

$$\mathrm{P}_{100\to n20}(t) = \frac{e^2b^2}{\hbar^2}\left|\langle 0,2;0,0\mid 2,0\rangle\right|^2\left|\left\langle n,2\left\|T^{(2)}\right\|1,0\right\rangle\right|^2|f(t)|^2$$

Para los estados finales {|n,1,1>, n ≥ 2}, tenemos:

$$c^{(1)}_{n11}(t) = -\frac{e}{i\hbar}\Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\underbrace{\left\langle n11\left|T^{(1)}_{-1}\right|100\right\rangle}_{0} - \frac{a}{\sqrt{2}}\underbrace{\left\langle n11\left|T^{(1)}_{1}\right|100\right\rangle}_{\langle 0,1;0,1|1,1\rangle\left\langle n,1\left\|T^{(1)}\right\|1,0\right\rangle} - b\underbrace{\left\langle n11\left|T^{(2)}_{0}\right|100\right\rangle}_{0}\Big)f(t)$$

$$= \frac{ea}{i\sqrt{2}\hbar}\underbrace{\langle 0,1;0,1\mid 1,1\rangle}_{\text{tabla CG}}\left\langle n,1\left\|T^{(1)}\right\|1,0\right\rangle f(t),$$

y la probabilidad de transición es:

$$\mathrm{P}_{100\to n11}(t) = \frac{e^2a^2}{2\hbar^2}\left|\langle 0,1;0,1\mid 1,1\rangle\right|^2\left|\left\langle n,1\|T^{(1)}\|1,0\right\rangle\right|^2|f(t)|^2$$

Por último, para los estados finales {|n,1,−1>,n ≥ 2} tenemos:

$$c^{(1)}_{n1-1}(t) = -\frac{e}{i\hbar}\Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\underbrace{\left\langle n1-1\left|T^{(1)}_{-1}\right|100\right\rangle}_{\langle 0,1;0,-1|1,-1\rangle\left\langle n,||T^{(1)}||1,0\right\rangle} - \frac{a}{\sqrt{2}}\underbrace{\left\langle n1-1\left|T^{(1)}_{1}\right|100\right\rangle}_{0} - b\underbrace{\left\langle n1-1\left|T^{(2)}_{0}\right|100\right\rangle}_{0}\Big)f(t)$$

$$= -\frac{ea}{i\sqrt{2}\hbar}\underbrace{\langle 0,1;0,-1\mid 1,-1\rangle}_{\text{tabla CG}}\left\langle n,1\left\|T^{(1)}\right\|1,0\right\rangle f(t),$$

y la probabilidad de transición es:

$$\mathrm{P}_{100\to n1-1}(t) = \tfrac{e^2a^2}{2\hbar^2}\left|\langle 0,1;0,-1\mid 1,-1\rangle\right|^2\left|\left\langle n,1||T^{(1)}||1,0\right\rangle\right|^2|f(t)|^2.$$

<u>Nota:</u> Por WE, la única diferencia entre las probabilidades de transición $P_{100\to n11}(t)$ y $P_{100\to n11-1}(t)$ está en el coeficiente de CG que aparece multiplicando. Por lo tanto, podemos escribir una probabilidad en función de la otra como:

$$\mathrm{P}_{100\to n1-1}(t) = P_{100\to n11}(t)\frac{|\langle 0,1;0,-1|1,-1\rangle|^2}{|\langle 0,1;0,1|1,1\rangle|^2}$$

Conociendo una de las probabilidades de transición tenemos también cuanto vale la otra.