Guía 9: Perturbaciones.

P9 Oscilador armónico perturbado

$$H = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}}_{H_0} + \underbrace{F_0 x \sin\omega t}_{V}$$

donde podría ser: $F_0 = -qE_0$ (campo eléctrico alterno)

$|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ fundamental.

- $c_n^{(0)}(t) = \delta_{n0}$

- $$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega_{n0}t'}\langle n|F_0 x \sin\omega t'|0\rangle dt'$$

$$= -\frac{i}{\hbar}F_0 \underbrace{\langle n|x|0\rangle}_{\langle 1|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}}\int_0^t e^{i\omega_{n0}t'}\sin\omega t'\, dt'$$

$|0\rangle$ Sólo se acopla a primer orden con el estado $|1\rangle$

$$\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar} = \omega_0.$$

$$\int_0^t e^{i\omega_0 t'}\left(\frac{e^{i\omega t'} - e^{-i\omega t'}}{2i}\right)dt' = \frac{1}{2i}\left[\frac{\left(e^{i(\omega_0+\omega)t} - 1\right)}{i(\omega_0+\omega)} - \frac{\left(e^{i(\omega_0-\omega)t} - 1\right)}{i(\omega_0-\omega)}\right]$$

validez: $\frac{F_0}{\sqrt{\hbar m\omega_0}} \ll |\omega_0 - \omega|$

de modo que $|c_n^{(1)}(t)| \ll 1$

Se tomó la parte que tiene $\frac{1}{\omega_0-\omega}$.

La función de onda en el c. de Schr.: $|\Psi(t)\rangle = \sum_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} C_n(t)$

$$|\Psi(t)\rangle \simeq |0\rangle e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} + C_1(t) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} |1\rangle$$

(b) $\langle X(t)\rangle = \langle \Psi(t)| x |\Psi(t)\rangle$

$$= \left(\langle 0| e^{\frac{iE_0 t}{\hbar}} + C_1^{(1)*}(t) e^{\frac{iE_1 t}{\hbar}} \langle 1| \right)$$

$$\times \left(e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} |0\rangle + C_1^{(1)}(t) e^{-iE_1 t/\hbar} |1\rangle \right)$$

$$= C_1^{(1)}(t) e^{-i\omega_{10} t} + C_1^{(1)*}(t) e^{-i\omega_{10} t}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[C_1^{(1)}(t) e^{-i\omega_0 t} \right]$$

$$\simeq \frac{F_0^2}{\sqrt{2}\hbar m\omega_0} \frac{(\sin\omega t - \sin\omega_0 t)}{\omega - \omega_0}$$

(Para simplificar solo tomo el término q' conserva la energía)

<u>a $t=0$</u> $\langle X(0)\rangle = 0$ ok!

oscilador forzado.

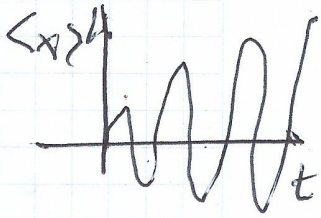
(c) Si $\omega = \omega_0 + \Delta$ $\Delta \to 0$.

$\sin(\omega t) = \sin\omega_0 t \cos\Delta t + \cos\omega_0 t \sin\Delta t \simeq \sin\omega_0 t + \Delta t \cos\omega_0 t$

(c) Si $\omega \to \omega_0$ $\langle X(t)\rangle \simeq \frac{F_0^2}{\sqrt{2}\hbar m\omega_0} t \cos\omega_0 t$

crece con el tiempo

Se comporta como un oscilador forzado resonante



Guía 9: Perturbaciones

P11 Spin 1/2 en campo $\vec{B}$

$$H_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2} \sigma_z \qquad \omega_0 = \frac{|e| B_z}{m}$$

Se enciende campo oscilante en dirección $\hat{x}$:

$B_x(t) = B_x \sin \omega t$

$$V(t) = \frac{\hbar \Omega}{2} \sin \omega t \, \sigma_x$$

$$\Omega = \frac{|e| B_x}{m}$$

Estado inicial $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ (ó $|1\rangle$)

Dos estados: $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

(a) • $c_n^{(0)} = \delta_{n0}$

• $$c_n^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \underbrace{\langle n | \sigma_x | 0 \rangle}_{\langle 1 | \sigma_x | 0 \rangle = 1} \frac{\hbar \Omega}{2} \int_0^t e^{i \omega_{n0} t'} \sin \omega t' \, dt'$$

$$c_0^{(1)} = 0$$

$$c_1^{(1)} = -\frac{i \Omega}{2} \frac{1}{2i} \left[\frac{\left(e^{i(\omega - \omega_0)t} - 1\right)}{i(\omega - \omega_0)} - \frac{\left(e^{-i(\omega + \omega_0)t} - 1\right)}{i(\omega + \omega_0)} \right]$$

Validez:

$$\Omega \ll 4(\omega - \omega_0)$$

$$P_{0 \to 1}(t) = \frac{\Omega^2}{16} |[\quad]|^2$$

Comparación con la RWA de los apuntes teórica.

En la aproximación de onda rotante:

Usamos solución con $\Omega \to \frac{\Omega}{4}$

$$\omega_{eg} = \omega_0 \quad \delta = \omega_0 - \omega$$

$$|\psi_I(t)\rangle = \alpha(t)\underbrace{|e\rangle}_{|0\rangle} + \beta(t)\underbrace{|g\rangle}_{|1\rangle}$$

$$c_0(t) = \beta(t) = e^{-i\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{i}{2}\frac{(\omega_0-\omega)}{\sqrt{\frac{(\omega_0-\omega)^2}{4}+\frac{\Omega^2}{16}}} \sin\sqrt{\frac{(\omega_0-\omega)^2}{4}+\frac{\Omega^2}{16}}\,t + \cos\sqrt{\frac{(\omega_0-\omega)^2}{4}+\frac{\Omega^2}{16}}\,t \right)$$

$$c_1(t) = \alpha(t) = -i\frac{\Omega}{2\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\frac{\Omega^2}{16}}}\, e^{-i\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}} \sin\sqrt{\frac{(\omega_0-\omega)^2}{4}+\frac{\Omega^2}{16}}\,t$$

Es correcto perturbativamente a ~~orden~~ 1er Ω.

$$c_1(t) = \alpha(t) \approx -i\frac{\Omega}{2}\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}-1}{\omega-\omega_0}\right)$$

- Pero el resultado perturbativo contiene término contra-rotante y va más allá de la RWA.
- El resultado analítico usa la RWA pero es no perturbativo en principio.