Clase 01

INTRODUCCIÓN

Vamos a estudiar una formulación axiomática de la mecánica cuántica y utilizarla para entender una variedad de sistemas simples.

Cronología:
- 1890: Radiación de cuerpo negro (Planck)
- 1905: Explicación del efecto fotoeléctrico (Einstein)
- 1913-1916: Cuantización de Bohr - Sommerfeld
- 1923: Dualidad onda-partícula (De Broglie)
- 1925: Mecánica matricial (Heisenberg, Born, Jordan)
- 1925-1926: Mecánica ondulatoria (Schrödinger)
- **1930: Formulación abstracta en el contexto del análisis funcional (Dirac)**
- **1932: Axiomas de Dirac - von Neumann**
- 1948: Integrales de camino (Feynman)

Hay interpretaciones/formulaciones alternativas a la que veremos.

Es la base de distintas teorías (modelo estándar, teoría cuántica de la información, etc.)

0. Repaso de Física 4

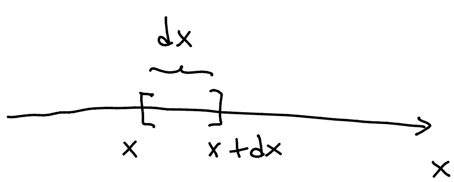
Ecuación de Schrödinger

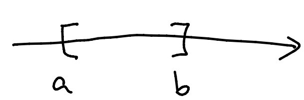
$\Psi(t,x)$ ← función de onda

con ella nos podemos construir

$$\underbrace{\rho(t,x)} \equiv |\Psi(t,x)|^2 \quad \text{(densidad de probabilidad)}$$

da la probabilidad de encontrar al electrón entre x y $x+dx$ a tiempo t





$$P([a,b],t) = \int_a^b dx\, \rho(t,x)$$

↑ probabilidad de encontrar

↑ probabilidad de encontrar al electrón entre a y b a tiempo t

La dinámica de $\Psi(t,x)$ está dada por la ec. de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(t,x) + V(t,x)\Psi(t,x)}_{\Big[\underbrace{\frac{p^2}{2m} + V(t,x)}_{H \text{ (Hamiltoniano)}}\Big]\Psi(t,x)}$$

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\bar{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2\Psi(t,\bar{r}) + V(t,\bar{r})\Psi(t,\bar{r})} \quad \left(\begin{array}{c}\text{ec. de}\\ \text{Schrödinger}\end{array}\right)$$

Ejemplos:

- $V(t,x) = 0$ (partícula libre) $\left(H = \frac{p^2}{2m}\right)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(t,x) \qquad (*)$$

Propongo: $\Psi(t,x) = T(t)\,\varphi(x)$ (separación de variables)

De $(*)$: $i\hbar\, T'(t)\,\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} T(t)\,\varphi''(x) \;\xRightarrow{\text{Divido por } T(t)\varphi(x)}$

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \equiv cte = E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\dfrac{i}{\hbar}E \Rightarrow \dfrac{d}{dt}[\log T(t)] = -\dfrac{i}{\hbar}E \Rightarrow T(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \\[2ex] \varphi''(x) + \underbrace{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}_{\equiv \omega^2}\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = A_E e^{\pm i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}\,x} \overset{p\equiv\sqrt{2mE}}{=} A_p e^{\pm i\frac{px}{\hbar}} \end{cases}$$

ec. de Schrödinger estacionaria para la partícula libre

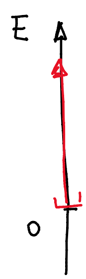
onda plana

$$\therefore \quad \Psi(t,x) = \sum_p A_p\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}\, e^{i\frac{px}{\hbar}} = \qquad (p \in \mathbb{R})$$

$$= \int dp\, A(p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t}\, e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

¿Cómo saco $A(p)$? $\longrightarrow$ Condición inicial: $\Psi(0,x) = \underset{\text{DATO}}{\Psi_0(x)}$

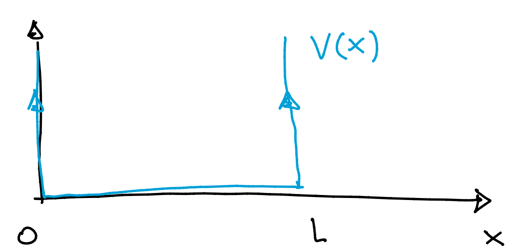
$$\Psi_0(x) = \int dp\, A(p)\, e^{\frac{ipx}{\hbar}} \longrightarrow \underline{A(p)} \text{ es la transf. de Fourier de } \Psi_0(x)$$



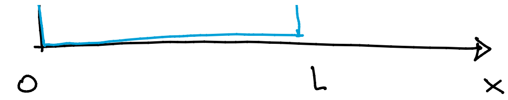
$\leftarrow$ espectro de energía $\qquad E(p) = \dfrac{p^2}{2m} \geq 0 \quad (p \in \mathbb{R})$

- Pozo de potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq L \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$\lbrace +\infty$ en otro caso



En general: $i\hbar \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi \quad (*)$

Propongo: $\Psi(t,x) = T(t)\varphi(x) \quad (\dots)$

De $(*)$:
$$\begin{cases} \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\dfrac{i}{\hbar}E & \text{(misma solución que antes)} \\ -\dfrac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x) & (1) \end{cases}$$

ec. de Schrödinger estacionaria

Volvamos al caso del pozo:

- Dividiendo (1) por $V(x)$ (cuando $x \notin [0,L]$):

$$-\underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\varphi''(x)}{V(x)}}_{\to 0} + \varphi(x) = E\underbrace{\frac{\varphi(x)}{V(x)}}_{\to 0} \Rightarrow \varphi(x) = 0 \quad \text{para } x \notin [0,L]$$

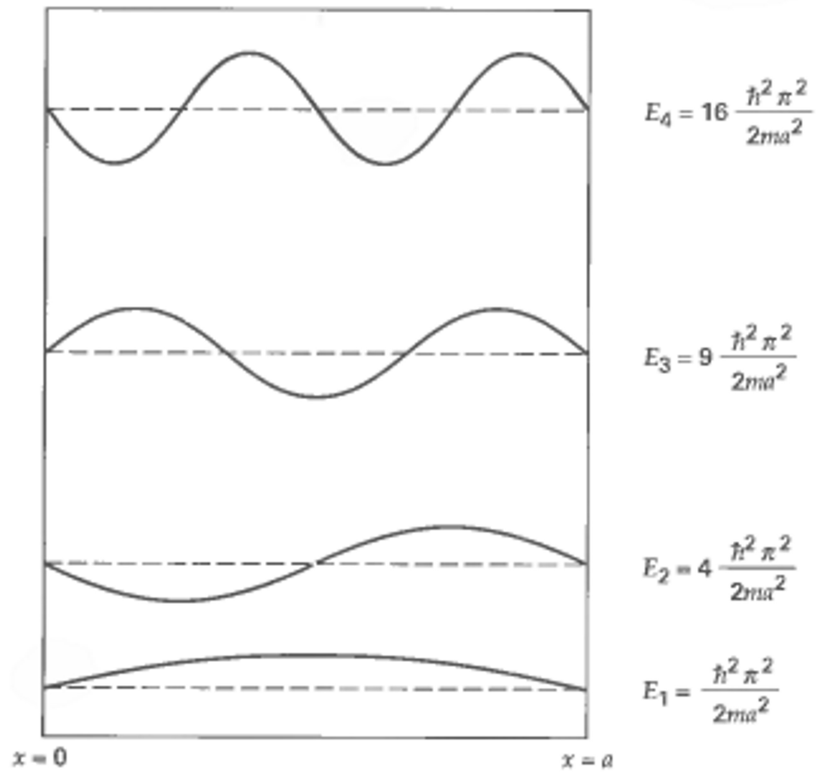
- Para $x \in [0,L]$:

$$\left.\begin{cases} -\dfrac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E\varphi(x) & \text{(Partícula libre)} \\ \underline{\varphi(0)} = \varphi(L) = \underline{0} \end{cases}\right\rbrace \Rightarrow \varphi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{p_n^2}{2m} \qquad \left(p_n = \hbar k_n = \hbar\frac{n\pi}{L}\right)$$

espectro de energía discreto

↑ espectro de energía discreto



- $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ (oscilador armónico)

Ec. de Schrödinger estacionaria:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \varphi(x) = E\varphi(x) \Rightarrow \quad x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\Rightarrow -x_0^4\varphi''(x) + x^2\varphi(x) = \frac{2E}{m\omega^2}\varphi(x)$$

Esta ecuación se puede resolver proponiendo una expansión en serie de potencias para $\varphi(x)$ (secc. 2, complemento C_V, p. 537 Cohen)

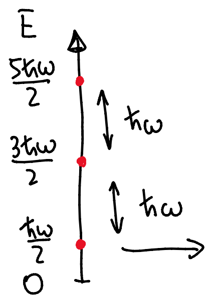
↓ soluciones

$$\left(\frac{x}{x_0^2} - \frac{d}{dx}\right)\left(\frac{x}{x_0^2} - \frac{d}{dx}\right)\overset{(n}{\cdots}\left(\frac{x}{x_0^2} - \frac{d}{dx}\right)$$

$\downarrow$ Soluciones

$$\underbrace{\left(\frac{x}{x_0^2}-\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{x}{x_0^2}-\frac{d}{dx}\right)\cdots\left(\frac{x}{x_0^2}-\frac{d}{dx}\right)}_{n}$$

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = A_n \left(\dfrac{x}{x_0^2}-\dfrac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/(2x_0^2)} \\ E_n = \hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad (n=0,1,2,\dots)$$



$\longrightarrow \varphi_0(x)$ (estado fundamental)