<u>Definición:</u> $\hat{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\hat{B}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operadores. Llamamos <u>conmutador</u> de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ al operador dado por

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Si $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ decimos que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ <u>conmutan</u>.

El <u>anticonmutador</u> de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ es el operador dado por:

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}.$$

Si $\{\hat{A}, \hat{B}\} = 0$ decimos que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ <u>anticonmutan</u>.

- Algunas propiedades (P01E10):

  * Identidad de Jacobi:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$$

Dem.) Ejercicio.

  * $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

Dem.) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} - \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{A}\hat{C} =$

$$= (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{C} + \hat{B}(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}) =$$

$$= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

  * Si $\hat{B}$ conmuta con $[\hat{A}, \hat{B}]$, entonces $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}]$.

Dem.) Usamos inducción. Supongamos que la propiedad vale para cierto $n \in \mathbb{N}$. Veamos entonces que vale también para $n+1$:

$$[\hat{A}, \hat{B}^{n+1}] = [\hat{A}, \hat{B}^n \hat{B}] = \hat{B}^n [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}^n]\hat{B} =$$

$$[\hat{A}, \hat{B}^{n+1}] = [\hat{A}, \hat{B}^n \hat{B}] = \hat{B}^n [\hat{A}, \hat{B}] + \underbrace{[\hat{A}, \hat{B}^n]}_{n\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]} \hat{B} =$$

$\hat{B}$ conmuta con $[\hat{A}, \hat{B}]$

$$= \hat{B}^n [\hat{A}, \hat{B}] + n\hat{B}^{n-1} [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B} =$$

$$= \hat{B}^n [\hat{A}, \hat{B}] + n \hat{B}^n [\hat{A}, \hat{B}] =$$

$$= (n+1) \hat{B}^n [\hat{A}, \hat{B}]$$ $\leftarrow$ $\therefore$ La propiedad vale para $n+1$.

Como además la propiedad vale para $n = 1$: $[\hat{A}, \hat{B}^1] = 1 . \hat{B}^{1-1} [\hat{A}, \hat{B}]$,

concluimos que es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

* Si f analítica, $[f(\hat{A}), \hat{B}] = f'(\hat{A}) [\hat{A}, \hat{B}]$. (si $\hat{B}$ conmuta con $[\hat{A}, \hat{B}]$)

Dem.) Vamos a dar la idea: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para ciertos a_n por ser f analítica.

$$[f(\hat{A}), \hat{B}] = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{A}^n, \hat{B} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\hat{A}^n, \hat{B}] =$$

$\uparrow$ esto lo voy a poder simplificar usando la propiedad del P01E10(f).

$$= \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n . n A^{n-1} \right)}_{f'(\hat{A})} [\hat{A}, \hat{B}] = f'(\hat{A}) [\hat{A}, \hat{B}].$$

* Fórmula de Baker - Campbell - Haussdorf :

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12}([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]) + \dots}$$

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{12}\left([\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + [\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]]\right) + \dots}$$

[Moretti, "Spectral theory & QM"
p. 569.]

<u>Definición:</u> $\hat{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\dim(\mathcal{H}) = n < \infty$. Sea $B = \{|u_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ es una base ON de $\mathcal{H}$, definimos la <u>traza</u> de $\hat{A}$ como la traza de la matriz $\nearrow [\hat{A}]_B$ que representa a $\hat{A}$ en la base B:

$$\mathrm{Tr}\,\hat{A} \equiv \mathrm{Tr}\,[\hat{A}]_B .$$

<u>Ejemplo:</u> Tomamos cierto $\mathcal{H}$ / $\dim(\mathcal{H}) = 2$. $B = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ base ON

Def. $\hat{A}$ por:

$$\hat{A}|u_1\rangle = a_{11}|u_1\rangle + a_{21}|u_2\rangle$$

$$\hat{A}|u_2\rangle = a_{12}|u_1\rangle + a_{22}|u_2\rangle$$

En este caso, la matriz que representa a $\hat{A}$ en la base B es:

$$[\hat{A}]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1|\hat{A}|u_1\rangle & \langle u_1|\hat{A}|u_2\rangle \\ \langle u_2|\hat{A}|u_1\rangle & \langle u_2|\hat{A}|u_2\rangle \end{pmatrix}$$

Entonces: $\mathrm{Tr}\,(\hat{A}) = \mathrm{Tr}\,[\hat{A}]_B = a_{11} + a_{22}$. //

<u>Observación:</u> La traza de un operador no depende de la base elegida:
(P01E12(a))

$B = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$

$C \equiv$ matriz de cambio de base de B a B'

$B' = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$

$$[\hat{A}]_{B'} = C\,[\hat{A}]_B\,C^{-1}$$

$$\mathrm{Tr}([\hat{A}]_{B'}) = \mathrm{Tr}(C[\hat{A}]_B C^{-1}) = \mathrm{Tr}(\overbrace{C^{-1}C}^{\mathbb{1}}[\hat{A}]_B) = \mathrm{Tr}([\hat{A}]_B).$$

<u>Observación:</u> $\quad \mathrm{Tr}(\hat{A}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle u_i | \hat{A} | u_i \rangle}_{\text{elementos de matriz diagonales}}$

1.2. Algunos operadores particulares

<u>Definición:</u> Sea $\underset{(\text{acotado})}{\hat{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}}$. El <u>adjunto</u> de $\hat{A}$ se define como el operador $\hat{A}^{\dagger}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que cumple

$$\langle u | \hat{A} | w \rangle = \langle w | \hat{A}^{\dagger} | u \rangle^* \quad \forall |u\rangle, |w\rangle \in \mathcal{H}.$$

Si ocurre $\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$, decimos que $\hat{A}$ es <u>autoadjunto</u>.

$$\begin{array}{c|c}
\mathcal{H} & \mathcal{H}^* \\
\hline
|\alpha\rangle \longleftrightarrow & T_{|\alpha\rangle} = \langle \alpha | \\
\hat{A}|\alpha\rangle \longleftrightarrow & T_{\hat{A}|\alpha\rangle} = \; ?
\end{array}$$

$T_{|\alpha\rangle}(|w\rangle) = \langle \alpha | w \rangle$

$\forall |w\rangle \in \mathcal{H}$

$$T_{\hat{A}|\alpha\rangle}(|w\rangle) = (\hat{A}|\alpha\rangle, |w\rangle) = (|w\rangle, \hat{A}|\alpha\rangle)^* =$$

$$= \langle w | \hat{A} | \alpha \rangle^* =$$

"bra" asociado al vector $\hat{A}|\alpha\rangle$

$$= \langle \alpha | \hat{A}^{\dagger} | w \rangle \quad \forall |w\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\underbrace{\langle \hat{A}\alpha|}_{} \xleftarrow{} \text{vector } \hat{A}|\alpha\rangle \qquad = \underbrace{\langle\alpha|\hat{A}^{\dagger}}|w\rangle \qquad \forall |w\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\therefore \quad T_{\hat{A}|\alpha\rangle} = \langle\alpha|\hat{A}^{\dagger}.$$

Ej.: Si A es una matriz: $\underbrace{A^{\dagger}}_{\text{adjunto}} = (A^{t})^{*}$ (traspuesta)

Algunas propiedades:

i) $(k\hat{A})^{\dagger} = k^{*}A^{\dagger}$; ($k \in \mathbb{C}$)

ii) $(\hat{A}\hat{B})^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}$;

iii) $(\hat{A}^{\dagger})^{\dagger} = \hat{A}$;

iv) $(\hat{A}^{\dagger})^{-1} = (\hat{A}^{-1})^{\dagger}$;

v) $(\hat{A}+\hat{B})^{\dagger} = \hat{A}^{\dagger} + \hat{B}^{\dagger}$.

Ejercicio: Probar que el adjunto de $\hat{A} \equiv |\psi\rangle\langle\phi|$ es $\hat{A}^{\dagger} = |\phi\rangle\langle\psi|$.

Definición: $\hat{U}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ acotado. Decimos que $\hat{U}$ es unitario si $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{\dagger}$.

Los operadores unitarios cumplen: $\hat{U}^{\dagger}\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^{\dagger} = \mathbb{1}$ (operador identidad)

Una propiedad importante (P01E12(f)): Los operadores unitarios dejan invariantes los productos internos.

$|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$

$|\alpha'\rangle = \hat{U}|\alpha\rangle$

$|\beta'\rangle = \hat{U}|\beta\rangle$

$\hat{U}$ unitario $\Rightarrow$ $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{\mathbb{1}}$

$$\langle\alpha'|\beta'\rangle = \langle\alpha|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\beta\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle.$$

<u>Definición:</u> $\hat{P}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ acotado. Decimos que $\hat{P}$ es un <u>proyector</u> si $\hat{P}^2 = \hat{P}$. Si además vale $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$, decimos que $\hat{P}$ es un <u>proyector ortogonal</u>.

<u>Ejemplo:</u> $\hat{P}_{|\psi\rangle} \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ para $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ tal que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. $\hat{P}_{|\psi\rangle}$ es un operador y además:

$$\hat{P}^2_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\overbrace{\langle\psi|\psi\rangle}^{1}\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{P}_{|\psi\rangle}$$

$\therefore$ $\hat{P}_{|\psi\rangle}$ es un proyector.

<u>Ejemplo:</u> si $\mathcal{B} = \{|u_\alpha\rangle\}_{\alpha\in I}$ BON de $\mathcal{H}$, entonces el operador

$\sum'_{\alpha\in I}\hat{P}_{|u_\alpha\rangle} = \sum'_{\alpha\in I}|u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|$ es la identidad. Para verlo, lo hacemos actuar sobre un vector $|w\rangle \in \mathcal{H}$ arbitrario:

Digamos que $|w\rangle = \sum'_{\beta\in I} c_\beta|u_\beta\rangle$

$$\left(\sum'_{\alpha\in I}\hat{P}_{|u_\alpha\rangle}\right)|w\rangle = \left(\sum'_{\alpha\in I}|u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\right)|w\rangle = \sum_{\alpha\in I}|u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|w\rangle =$$

$$\left(\sum_{\alpha\in I} P_{|u_\alpha\rangle}\right)|w\rangle = \left(\sum_{\alpha\in I} |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|\right)|w\rangle = \sum_{\alpha\in I} |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|w\rangle =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} c_\beta\, |u_\alpha\rangle \overbrace{\langle u_\alpha | u_\beta\rangle}^{\text{“}\delta_{\alpha\beta}\text{”}} = \sum_{\alpha} c_\alpha\, |u_\alpha\rangle = |w\rangle$$

$$\therefore \quad \sum_{\alpha\in I} \hat{P}_{|u_\alpha\rangle} = \hat{\mathbb{1}}\,. \quad \leftarrow$$ Esta propiedad la van a usar en el Ejercicio 12(c).

<u>Definición:</u> $\hat{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ acotado. Si $|v\rangle \in \mathcal{H} - \{0\}$ es tal que

$$\hat{A}|v\rangle = \lambda|v\rangle\,, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}\,,$$

se dice que $|v\rangle$ es <u>autovector</u> de $\hat{A}$ con <u>autovalor</u> λ.

<u>Descomposición espectral de $\hat{A}$:</u> (Â autoadjunto)

$$\hat{A} = \sum_i \lambda_i P_{|v_i\rangle}\,, \quad \text{siendo } \hat{A}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle$$

con $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$

$$= \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|$$