Física Teórica 2 - Práctica

Espacios de dimensión infinita.

Espacios de dimensión infinita

Temas a ver:

- Repaso

Espacios de dimensión infinita

Temas a ver:

- Repaso
- Operadores Q y P

Temas a ver:

- Repaso
- Operadores Q y P
    - Operador T (Ejercicio 20)

Espacios de dimensión infinita

Temas a ver:

- Repaso
- Operadores Q y P
  - Operador T (Ejercicio 20)
  - La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Espacios de dimensión infinita

Temas a ver:

- Repaso
- Operadores Q y P
  - Operador T (Ejercicio 20)
  - La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$
  - La representación en $\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$

Temas a ver:

- Repaso
- Operadores Q y P
    - Operador T (Ejercicio 20)
    - La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$
    - La representación en $\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$
- Ejercicio 19

Espacios de dimensión infinita

Temas a ver:

- Repaso
- Operadores Q y P
  - Operador T (Ejercicio 20)
  - La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$
  - La representación en $\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$
- Ejercicio 19

Recordemos

Vimos que en cuántica los estados vienen representados por vectores en un espacio de Hilbert ,$\mathcal{H}$. Además, si el espacio es separable, o bien es de dimensión finita o bien

$$\mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ función integrable}/ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx.$$

Esta clase nos centraremos en estudiar este espacio.

Recordemos

Vimos que en cuántica los estados vienen representados por vectores en un espacio de Hilbert ,$\mathcal{H}$. Además, si el espacio es separable, o bien es de dimensión finita o bien

$$\mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ función integrable}/ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx.$$

Esta clase nos centraremos en estudiar este espacio. Recordemos que venimos usando este espacio desde F4 para representar una partícula en un potencial. Por ejemplo, el estado fundamental del oscilador armónico

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{x_{ZPF}\sqrt{2\pi}}} e^{-x^2/4x_{ZPF}^2}, \; x_{ZPF} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Recordemos

Vimos que en cuántica los estados vienen representados por vectores en un espacio de Hilbert ,$\mathcal{H}$. Además, si el espacio es separable, o bien es de dimensión finita o bien

$$\mathcal{H} \simeq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ función integrable} / \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx.$$

Esta clase nos centraremos en estudiar este espacio. Recordemos que venimos usando este espacio desde F4 para representar una partícula en un potencial. Por ejemplo, el estado fundamental del oscilador armónico

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{x_{ZPF}\sqrt{2\pi}}} e^{-x^2/4x_{ZPF}^2}, \; x_{ZPF} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1 < \infty \implies \psi_0 \in L^2.$$

Obserbable: Q $\longrightarrow$ Operador: $\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\hat{Q} = \hat{Q}^{\dagger}$

Medimos Q en el laboratorio $\longrightarrow$ Obtenemos algún $q \in \mathbb{R}$ autovalor de $\hat{Q}$.

$$\text{Obserbable: Q} \longrightarrow \text{Operador: } \hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ tal que } \hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$$

$$\text{Medimos Q en el laboratorio} \longrightarrow \text{Obtenemos algún } q \in \mathbb{R} \text{ autovalor de} \hat{Q}.$$

(Si recuerdan todo autovalor de un operador hermítico es real. Por eso pusimos la condición de que los operadores sean hermíticos, para garantizar que los autovalores sean reales dado que todos los resultados que medimos en el laboratorio lo son.)

$$\text{Obserbable: Q} \longrightarrow \text{Operador: } \hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ tal que } \hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$$

$$\text{Medimos Q en el laboratorio} \longrightarrow \text{Obtenemos algún } q \in \mathbb{R} \text{ autovalor de} \hat{Q}.$$

(Si recuerdan todo autovalor de un operador hermítico es real. Por eso pusimos la condición de que los operadores sean hermíticos, para garantizar que los autovalores sean reales dado que todos los resultados que medimos en el laboratorio lo son.)

Por ejemplo, en el oscilador armónico la energía es un observable que tiene asociado el operador hamiltoniano $\hat{H}$. Si medimos la energía en el laboratio los únicos valores que podemos obtener son sus autovalores

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2).$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Supongamos que tenemos dos operadores hermíticos $\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y $\hat{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\boxed{[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar}. \tag{1}$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Supongamos que tenemos dos operadores hermíticos $\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y $\hat{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\boxed{[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar}. \tag{1}$$

Definimos el operador de traslación

$$\boxed{T(a) := \exp(-i\hat{P}a/\hbar)}, \; a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Supongamos que tenemos dos operadores hermíticos $\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y $\hat{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\boxed{[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar}. \tag{1}$$

Definimos el operador de traslación

$$\boxed{T(a) := \exp(-i\hat{P}a/\hbar)}, \; a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Propiedades de T

El operador traslación es unitario

Operadores Q y P: Operador traslación

Supongamos que tenemos dos operadores hermíticos $\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y $\hat{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\boxed{[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar}. \tag{1}$$

Definimos el operador de traslación

$$\boxed{T(a) := \exp(-i\hat{P}a/\hbar)}, \; a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Propiedades de T

El operador traslación es unitario

$$T^\dagger(a) = \exp(-i^*\hat{P}^\dagger a^*/\hbar) = \exp(i\hat{P}a/\hbar) = T(-a)$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Supongamos que tenemos dos operadores hermíticos $\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y $\hat{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\boxed{[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar}. \tag{1}$$

Definimos el operador de traslación

$$\boxed{T(a) := \exp(-i\hat{P}a/\hbar)}, \; a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Propiedades de T

El operador traslación es unitario

$$T^\dagger(a) = \exp(-i^*\hat{P}^\dagger a^*/\hbar) = \exp(i\hat{P}a/\hbar) = T(-a)$$

$$T^\dagger(a)T(a) = \exp(i\hat{P}a/\hbar)\exp(-i\hat{P}a/\hbar) = \mathrm{Id}$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Supongamos que tenemos dos operadores hermíticos $\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y $\hat{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\boxed{[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar}. \tag{1}$$

Definimos el operador de traslación

$$\boxed{T(a) := \exp(-i\hat{P}a/\hbar)}, \; a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Propiedades de T

El operador traslación es unitario

$$T^\dagger(a) = \exp(-i^* \hat{P}^\dagger a^* /\hbar) = \exp(i\hat{P}a/\hbar) = T(-a)$$

$$T^\dagger(a)T(a) = \exp(i\hat{P}a/\hbar)\exp(-i\hat{P}a/\hbar) = \mathrm{Id}$$

$$T(a)T^\dagger(a) = \mathrm{Id}$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Supongamos que tenemos dos operadores hermíticos $\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y $\hat{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que

$$\boxed{[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar}. \tag{1}$$

Definimos el operador de traslación

$$\boxed{T(a) := \exp(-i\hat{P}a/\hbar)}, \ a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Propiedades de T

El operador traslación es unitario

$$T^\dagger(a) = \exp(-i^*\hat{P}^\dagger a^*/\hbar) = \exp(i\hat{P}a/\hbar) = T(-a)$$

$$T^\dagger(a)T(a) = \exp(i\hat{P}a/\hbar)\exp(-i\hat{P}a/\hbar) = \mathrm{Id}$$

$$T(a)T^\dagger(a) = \mathrm{Id}$$

$$\Longrightarrow \ \boxed{T^\dagger(a) = T^{-1}(a) = T(-a)}. \tag{3}$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Además

$$T(a)\,T(b) = \exp(-i\hat{P}a/\hbar)\,\exp(-i\hat{P}b/\hbar) = \exp(-i\hat{P}(a+b)/\hbar)$$

donde usamos que $[\hat{P}, \hat{P}] = 0$ para juntar las exponenciales (ejercicio 11)

Operadores Q y P: Operador traslación

Además

$$T(a)T(b) = \exp(-i\hat{P}a/\hbar)\exp(-i\hat{P}b/\hbar) = \exp(-i\hat{P}(a+b)/\hbar)$$

donde usamos que $[\hat{P}, \hat{P}] = 0$ para juntar las exponenciales (ejercicio 11) . Entonces

$$\boxed{T(a)T(b) = T(a+b)} \tag{4}$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Además

$$T(a)T(b) = \exp(-i\hat{P}a/\hbar)\exp(-i\hat{P}b/\hbar) = \exp(-i\hat{P}(a+b)/\hbar)$$

donde usamos que $[\hat{P},\hat{P}] = 0$ para juntar las exponenciales (ejercicio 11) . Entonces

$$\boxed{T(a)T(b) = T(a+b)} \tag{4}$$

Usando la propiedad g) del ejercicio 10 ($[\hat{A}, f(\hat{B})] = f'(\hat{B})[\hat{A},\hat{B}]$)

$$[\hat{Q}, T(a)] = [\hat{Q}, \exp(-i\hat{P}a/\hbar)] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)[\hat{Q},\hat{P}] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)i\hbar$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Además

$$T(a)T(b) = \exp(-i\hat{P}a/\hbar)\exp(-i\hat{P}b/\hbar) = \exp(-i\hat{P}(a+b)/\hbar)$$

donde usamos que $[\hat{P}, \hat{P}] = 0$ para juntar las exponenciales (ejercicio 11) . Entonces

$$\boxed{T(a)T(b) = T(a+b)} \tag{4}$$

Usando la propiedad g) del ejercicio 10 ($[\hat{A}, f(\hat{B})] = f'(\hat{B})[\hat{A}, \hat{B}]$)

$$[\hat{Q}, T(a)] = [\hat{Q}, \exp(-i\hat{P}a/\hbar)] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)[\hat{Q}, \hat{P}] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)i\hbar$$

$$\boxed{[\hat{Q}, T(a)] = aT(a)} \tag{5}$$

Además

$$T(a)T(b) = \exp(-i\hat{P}a/\hbar)\exp(-i\hat{P}b/\hbar) = \exp(-i\hat{P}(a+b)/\hbar)$$

donde usamos que $[\hat{P}, \hat{P}] = 0$ para juntar las exponenciales (ejercicio 11) . Entonces

$$\boxed{T(a)T(b) = T(a+b)} \tag{4}$$

Usando la propiedad g) del ejercicio 10 ($[\hat{A}, f(\hat{B})] = f'(\hat{B})[\hat{A}, \hat{B}]$)

$$[\hat{Q}, T(a)] = [\hat{Q}, \exp(-i\hat{P}a/\hbar)] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)[\hat{Q}, \hat{P}] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)i\hbar$$

$$\boxed{[\hat{Q}, T(a)] = aT(a)} \tag{5}$$

$$\iff aT(a) = [\hat{Q}, T(a)] = \hat{Q}T(a) - T(a)\hat{Q}$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Además

$$T(a)T(b) = \exp(-i\hat{P}a/\hbar)\exp(-i\hat{P}b/\hbar) = \exp(-i\hat{P}(a+b)/\hbar)$$

donde usamos que $[\hat{P}, \hat{P}] = 0$ para juntar las exponenciales (ejercicio 11) . Entonces

$$\boxed{T(a)T(b) = T(a+b)} \tag{4}$$

Usando la propiedad g) del ejercicio 10 ($[\hat{A}, f(\hat{B})] = f'(\hat{B})[\hat{A}, \hat{B}]$)

$$[\hat{Q}, T(a)] = [\hat{Q}, \exp(-i\hat{P}a/\hbar)] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)[\hat{Q}, \hat{P}] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)i\hbar$$

$$\boxed{[\hat{Q}, T(a)] = aT(a)} \tag{5}$$

$$\iff aT(a) = [\hat{Q}, T(a)] = \hat{Q}T(a) - T(a)\hat{Q}$$

$$\iff \boxed{\hat{Q}T(a) = T(a)\left(\hat{Q} + a\right)} \tag{6}$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Además

$$T(a)T(b) = \exp(-i\hat{P}a/\hbar)\exp(-i\hat{P}b/\hbar) = \exp(-i\hat{P}(a+b)/\hbar)$$

donde usamos que $[\hat{P}, \hat{P}] = 0$ para juntar las exponenciales (ejercicio 11) . Entonces

$$\boxed{T(a)T(b) = T(a+b)} \tag{4}$$

Usando la propiedad g) del ejercicio 10 ($[\hat{A}, f(\hat{B})] = f'(\hat{B})[\hat{A}, \hat{B}]$)

$$[\hat{Q}, T(a)] = [\hat{Q}, \exp(-i\hat{P}a/\hbar)] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)[\hat{Q}, \hat{P}] = -ia/\hbar\exp(-i\hat{P}a/\hbar)i\hbar$$

$$\boxed{[\hat{Q}, T(a)] = aT(a)} \tag{5}$$

$$\iff aT(a) = [\hat{Q}, T(a)] = \hat{Q}T(a) - T(a)\hat{Q}$$

$$\iff \boxed{\hat{Q}T(a) = T(a)\left(\hat{Q} + a\right)} \tag{6}$$

$$\iff \boxed{T^{-1}\hat{Q}T(a) = T^{\dagger}\hat{Q}T(a) = \hat{Q} + a}. \tag{7}$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Podemos ver entonces que el valor de expectación de $\hat{Q}$ en el estado $|\psi_a\rangle = T(a)|\psi\rangle$ es

$$\langle \hat{Q}\rangle_{\psi_a} = \langle \psi_a|\hat{Q}|\psi_a\rangle = \langle\psi|T^\dagger \hat{Q}T(a)|\psi\rangle = \langle\psi|\left[\hat{Q}+a\right]|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle + a$$

Operadores Q y P: Operador traslación

Podemos ver entonces que el valor de expectación de $\hat{Q}$ en el estado $|\psi_a\rangle = T(a)|\psi\rangle$ es

$$\langle\hat{Q}\rangle_{\psi_a} = \langle\psi_a|\hat{Q}|\psi_a\rangle = \langle\psi|T^\dagger\hat{Q}T(a)|\psi\rangle = \langle\psi|\left[\hat{Q}+a\right]|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle + a$$

$$\implies \boxed{\langle\hat{Q}\rangle_{\psi_a} = \langle\hat{Q}\rangle_{\psi} + a}. \tag{8}$$

Operadores Q y P

Sea $|q\rangle \in \mathcal{H}$ un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor $q \in \mathbb{R}$, o sea,

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle. \tag{9}$$

Operadores Q y P

Sea $|q\rangle \in \mathcal{H}$ un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor $q \in \mathbb{R}$, o sea,

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle. \tag{9}$$

La acción sobre los bra es

$$(\hat{Q}|q\rangle)^\dagger = (q|q\rangle)^\dagger \implies \langle q|\hat{Q}^\dagger = \langle q|q^* \implies \langle q|\hat{Q} = \langle q|q. \tag{10}$$

Operadores Q y P

Sea $|q\rangle \in \mathcal{H}$ un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor $q \in \mathbb{R}$, o sea,

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle. \tag{9}$$

La acción sobre los bra es

$$(\hat{Q}|q\rangle)^\dagger = (q|q\rangle)^\dagger \implies \langle q|\hat{Q}^\dagger = \langle q|q^* \implies \langle q|\hat{Q} = \langle q|q. \tag{10}$$

Entonces

$$\hat{Q}T(a)|q\rangle = T(a)\left(\hat{Q} + a\right)|q\rangle = T(a)\,(q + a)\,|q\rangle = (q + a)\,T(a)|q\rangle$$

Operadores Q y P

Sea $|q\rangle \in \mathcal{H}$ un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor $q \in \mathbb{R}$, o sea,

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle. \tag{9}$$

La acción sobre los bra es

$$(\hat{Q}|q\rangle)^\dagger = (q|q\rangle)^\dagger \implies \langle q|\hat{Q}^\dagger = \langle q|q^* \implies \langle q|\hat{Q} = \langle q|q. \tag{10}$$

Entonces

$$\hat{Q}T(a)|q\rangle = T(a)\left(\hat{Q} + a\right)|q\rangle = T(a)\,(q + a)\,|q\rangle = (q + a)\,T(a)|q\rangle$$

lo que significa que $T(a)|q\rangle$ es un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor $(q + a)$

Sea $|q\rangle \in \mathcal{H}$ un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor $q \in \mathbb{R}$, o sea,

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle. \tag{9}$$

La acción sobre los bra es

$$(\hat{Q}|q\rangle)^\dagger = (q|q\rangle)^\dagger \implies \langle q|\hat{Q}^\dagger = \langle q|q^* \implies \langle q|\hat{Q} = \langle q|q. \tag{10}$$

Entonces

$$\hat{Q}T(a)|q\rangle = T(a)\left(\hat{Q}+a\right)|q\rangle = T(a)\,(q+a)\,|q\rangle = (q+a)\,T(a)|q\rangle$$

lo que significa que $T(a)|q\rangle$ es un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor $(q+a)$, es decir,

$$\boxed{T(a)|q\rangle = |q+a\rangle}. \tag{11}$$

Operadores Q y P

También se puede ver la acción sobre los bra

$$(T(-a)|q\rangle)^\dagger = (|q-a\rangle)^\dagger$$

Operadores Q y P

También se puede ver la acción sobre los bra

$$(T(-a)|q\rangle)^\dagger = (|q-a\rangle)^\dagger$$

$$\langle q|T^\dagger(-a) = \langle q-a|$$

También se puede ver la acción sobre los bra

$$(T(-a)|q\rangle)^\dagger = (|q-a\rangle)^\dagger$$

$$\langle q|T^\dagger(-a) = \langle q-a|$$

$$\implies \boxed{\langle q|T(a) = \langle q-a|}. \tag{12}$$

También se puede ver la acción sobre los bra

$$(T(-a)|q\rangle)^\dagger = (|q-a\rangle)^\dagger$$

$$\langle q|T^\dagger(-a) = \langle q-a|$$

$$\implies \boxed{\langle q|T(a) = \langle q-a|}. \tag{12}$$

Así dado un autovector de $\hat{Q}$ siempre podemos encontrar otro con el autovalor que deseemos, o sea, su conjunto de autovalores son todos los números reales.

También se puede ver la acción sobre los bra

$$(T(-a)|q\rangle)^\dagger = (|q-a\rangle)^\dagger$$

$$\langle q|T^\dagger(-a) = \langle q-a|$$

$$\implies \boxed{\langle q|T(a) = \langle q-a|}. \tag{12}$$

Así dado un autovector de $\hat{Q}$ siempre podemos encontrar otro con el autovalor que deseemos, o sea, su conjunto de autovalores son todos los números reales. Esto además muestra que los operadores $\hat{Q}$ y $\hat{P}$ solo pueden encontrarse en un espacio de dimensión infinita, ya que de lo contrario la cantidad de autovalores estaría acotada por la dimensión del espacio.

Operadores Q y P: Grado de degeneración

Proposición: Si uno de los autovalores es no-degenerado entonces todos lo son.

Operadores Q y P: Grado de degeneración

Proposición: Si uno de los autovalores es no-degenerado entonces todos lo son.

Dem.: Si el autovalor q es no-degenerado con autovector $|q\rangle$ y suponemos que existe otro autovalor b con 2 autovectores ortogonales $|b, 1\rangle$ y $|b, 2\rangle$

Operadores Q y P: Grado de degeneración

Proposición: Si uno de los autovalores es no-degenerado entonces todos lo son.

Dem.: Si el autovalor q es no-degenerado con autovector $|q\rangle$ y suponemos que existe otro autovalor b con 2 autovectores ortogonales $|b,1\rangle$ y $|b,2\rangle$ entonces como $T(q-b)$ es un operador unitario (preserva el producto interno)

$$T(q-b)|b,1\rangle = |q,1\rangle$$

$$T(q-b)|b,2\rangle = |q,2\rangle$$

son dos vectores ortogonales distintos con el mismo autovalor q, abs! Es más de esta forma podemos probar que todos los autovalores tienen el mismo grado de degeneración.

Operadores Q y P: Grado de degeneración

Proposición: Si uno de los autovalores es no-degenerado entonces todos lo son.

Dem.: Si el autovalor q es no-degenerado con autovector $|q\rangle$ y suponemos que existe otro autovalor b con 2 autovectores ortogonales $|b,1\rangle$ y $|b,2\rangle$ entonces como $T(q-b)$ es un operador unitario (preserva el producto interno)

$$T(q-b)|b,1\rangle = |q,1\rangle$$

$$T(q-b)|b,2\rangle = |q,2\rangle$$

son dos vectores ortogonales distintos con el mismo autovalor q, abs! Es más de esta forma podemos probar que todos los autovalores tienen el mismo grado de degeneración. De ahora en adelante asumiremos que los operadores $\hat{Q}$ y $\hat{P}$ no tienen autovalores degenerados.

Como $\hat{Q}$ es un observable cuyos autovalores son todos los reales y no están degenerados fijando que el vector $|0\rangle$ esté normalizado

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{13}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Como $\hat{Q}$ es un observable cuyos autovalores son todos los reales y no están degenerados fijando que el vector $|0\rangle$ esté normalizado

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{13}$$

y que

$$|q\rangle := T(q)|0\rangle \tag{14}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Como $\hat{Q}$ es un observable cuyos autovalores son todos los reales y no están degenerados fijando que el vector $|0\rangle$ esté normalizado

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{13}$$

y que

$$|q\rangle := T(q)|0\rangle \tag{14}$$

tenemos que el conjunto $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ de autovectores de $\hat{Q}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Como $\hat{Q}$ es un observable cuyos autovalores son todos los reales y no están degenerados fijando que el vector $|0\rangle$ esté normalizado

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{13}$$

y que

$$|q\rangle := T(q)|0\rangle \tag{14}$$

tenemos que el conjunto $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ de autovectores de $\hat{Q}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Así, todo vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ se puede expandir en esa base como

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,|q\rangle\langle q|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,\psi(q)\,|q\rangle, \tag{15}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Como $\hat{Q}$ es un observable cuyos autovalores son todos los reales y no están degenerados fijando que el vector $|0\rangle$ esté normalizado

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{13}$$

y que

$$|q\rangle := T(q)|0\rangle \tag{14}$$

tenemos que el conjunto $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ de autovectores de $\hat{Q}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Así, todo vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ se puede expandir en esa base como

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, |q\rangle\langle q|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, \psi(q)\, |q\rangle, \tag{15}$$

donde definimos la función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\boxed{\psi(q) := \langle q|\psi\rangle}. \tag{16}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Como $\hat{Q}$ es un observable cuyos autovalores son todos los reales y no están degenerados fijando que el vector $|0\rangle$ esté normalizado

$$\langle 0|0\rangle = 1 \tag{13}$$

y que

$$|q\rangle := T(q)|0\rangle \tag{14}$$

tenemos que el conjunto $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ de autovectores de $\hat{Q}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Así, todo vector $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ se puede expandir en esa base como

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,|q\rangle\langle q|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,\psi(q)\,|q\rangle, \tag{15}$$

donde definimos la función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\boxed{\psi(q) := \langle q|\psi\rangle}. \tag{16}$$

Esto también se puede escribir como la relación de completitud de la base

$$\int_{\mathbb{R}} dq\,|q\rangle\langle q| = 1. \tag{17}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Si el estado está normalizado esta función debe cumplir que

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|1|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\int_{\mathbb{R}} dq\, |q\rangle\langle q|\right)|\psi\rangle$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Si el estado está normalizado esta función debe cumplir que

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|1|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\int_{\mathbb{R}} dq\,|q\rangle\langle q|\right)|\psi\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dq\,\langle\psi|q\rangle\langle q|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,\langle q|\psi\rangle^*\langle q|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,\psi^*(q)\psi(q)$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Si el estado está normalizado esta función debe cumplir que

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|1|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\int_{\mathbb{R}} dq\,|q\rangle\langle q|\right)|\psi\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dq\,\langle\psi|q\rangle\langle q|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,\langle q|\psi\rangle^*\langle q|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,\psi^*(q)\psi(q)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\psi(q) \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})}. \tag{18}$$

La acción de los operadores

- Así tenemos que la acción del operador $\hat{Q}$ en la representación $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ es

$$\boxed{\langle q|\hat{Q}|\psi\rangle =} q\langle q|\psi\rangle = \boxed{q\psi(q)}. \tag{19}$$

La acción de los operadores

- Así tenemos que la acción del operador $\hat{Q}$ en la representación $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ es

$$\boxed{\langle q|\hat{Q}|\psi\rangle =} q\langle q|\psi\rangle = \boxed{q\psi(q)}. \tag{19}$$

O sea que la acción de $\hat{Q}$ en la representación $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ es simplemente multiplicar por q.

La acción de los operadores

- Así tenemos que la acción del operador $\hat{Q}$ en la representación $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ es

$$\boxed{\langle q|\hat{Q}|\psi\rangle =} q\langle q|\psi\rangle = \boxed{q\psi(q)}. \tag{19}$$

O sea que la acción de $\hat{Q}$ en la representación $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ es simplemente multiplicar por q.

- La acción del operador de traslación es

$$\boxed{\langle q|T(a)|\psi\rangle =}\langle q-a|\psi\rangle = \boxed{\psi(q-a)}. \tag{20}$$

- Para ver la acción del operador $\hat{P}$ basta recordar que

$$\psi(q+\epsilon) = \langle q|T(-\epsilon)|\psi\rangle = \langle q|\exp(i\hat{P}\epsilon/\hbar)|\psi\rangle$$

- Para ver la acción del operador $\hat{P}$ basta recordar que

$$\psi(q+\epsilon) = \langle q|T(-\epsilon)|\psi\rangle = \langle q|\exp(i\hat{P}\epsilon/\hbar)|\psi\rangle$$

$$= \langle q|\left[1+(i\hat{P}\epsilon/\hbar)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right]|\psi\rangle = \langle q|\psi\rangle + (i\epsilon/\hbar)\langle q|\hat{P}|\psi\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

- Para ver la acción del operador $\hat{P}$ basta recordar que

$$\psi(q+\epsilon) = \langle q|T(-\epsilon)|\psi\rangle = \langle q|\exp(i\hat{P}\epsilon/\hbar)|\psi\rangle$$

$$= \langle q|\left[1 + (i\hat{P}\epsilon/\hbar) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]|\psi\rangle = \langle q|\psi\rangle + (i\epsilon/\hbar)\langle q|\hat{P}|\psi\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

entonces despejando tenemos

$$\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = \frac{\psi(q+\epsilon) - \langle q|\psi\rangle}{(i\epsilon/\hbar)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

- Para ver la acción del operador $\hat{P}$ basta recordar que

$$\psi(q+\epsilon) = \langle q|T(-\epsilon)|\psi\rangle = \langle q|\exp(i\hat{P}\epsilon/\hbar)|\psi\rangle$$

$$= \langle q|\left[1 + (i\hat{P}\epsilon/\hbar) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]|\psi\rangle = \langle q|\psi\rangle + (i\epsilon/\hbar)\langle q|\hat{P}|\psi\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

entonces despejando tenemos

$$\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = \frac{\psi(q+\epsilon) - \langle q|\psi\rangle}{(i\epsilon/\hbar)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

tomando el límite

$$\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\psi(q+\epsilon) - \psi(q)}{\epsilon}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

- Para ver la acción del operador $\hat{P}$ basta recordar que

$$\psi(q+\epsilon) = \langle q|T(-\epsilon)|\psi\rangle = \langle q|\exp(i\hat{P}\epsilon/\hbar)|\psi\rangle$$

$$= \langle q|\left[1 + (i\hat{P}\epsilon/\hbar) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]|\psi\rangle = \langle q|\psi\rangle + (i\epsilon/\hbar)\langle q|\hat{P}|\psi\rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

entonces despejando tenemos

$$\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = \frac{\psi(q+\epsilon) - \langle q|\psi\rangle}{(i\epsilon/\hbar)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

tomando el límite

$$\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\psi(q+\epsilon) - \psi(q)}{\epsilon}$$

$$\boxed{\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dq}\psi(q)}. \tag{21}$$

Autovectores

- Los autovectores de $\hat{Q}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{Q}|q_0\rangle = q\psi_{q_0}(q)$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Autovectores

- Los autovectores de $\hat{Q}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{Q}|q_0\rangle = q\psi_{q_0}(q)$$

pero como $|q_0\rangle$ es autovector de $\hat{Q}$ tenemos que

$$\langle q|\hat{Q}|q_0\rangle = q_0\langle q|q_0\rangle = q_0\psi_{q_0}(q)$$

Autovectores

- Los autovectores de $\hat{Q}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{Q}|q_0\rangle = q\psi_{q_0}(q)$$

pero como $|q_0\rangle$ es autovector de $\hat{Q}$ tenemos que

$$\langle q|\hat{Q}|q_0\rangle = q_0\langle q|q_0\rangle = q_0\psi_{q_0}(q)$$

entonces

$$q\psi_{q_0}(q) = q_0\psi_{q_0}(q) \implies (q - q_0)\psi_{q_0}(q) = 0$$

Autovectores

- Los autovectores de $\hat{Q}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{Q}|q_0\rangle = q\psi_{q_0}(q)$$

pero como $|q_0\rangle$ es autovector de $\hat{Q}$ tenemos que

$$\langle q|\hat{Q}|q_0\rangle = q_0\langle q|q_0\rangle = q_0\psi_{q_0}(q)$$

entonces

$$q\psi_{q_0}(q) = q_0\psi_{q_0}(q) \implies (q-q_0)\psi_{q_0}(q) = 0$$

$$\implies \psi_{q_0}(q) = 0, \forall q \neq q_0 \tag{22}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Si insistimos en que $\psi_{q_0} \in L^2$ entonces la única posibilidad sería la función idénticamente 0. Como esto no nos sirve a nivel físico, podemos relajar la condición anterior recordando que en el laboratorio solo podemos observar intervalos y pedir

$$\psi_{q_0}^{\epsilon}(q) = 0, \, \forall q \notin [q_0 - \epsilon/2, q_0 + \epsilon/2]. \tag{23}$$

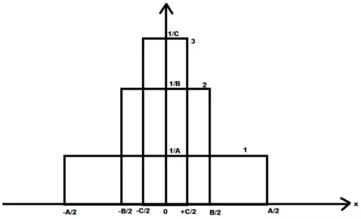
Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Si insistimos en que $\psi_{q_0} \in L^2$ entonces la única posibilidad sería la función idénticamente 0. Como esto no nos sirve a nivel físico, podemos relajar la condición anterior recordando que en el laboratorio solo podemos observar intervalos y pedir

$$\psi^{\epsilon}_{q_0}(q) = 0, \; \forall q \notin [q_0 - \epsilon/2, q_0 + \epsilon/2]. \tag{23}$$

Podemos tomar entonces, por ejemplo,

$$\psi^{\epsilon}_{q_0}(q) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\Theta(\epsilon/2 - |q - q_0|)$$



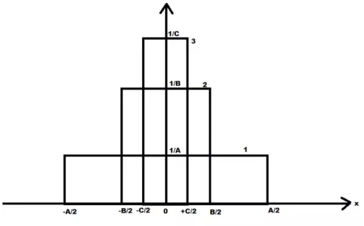
Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Si insistimos en que $\psi_{q_0} \in L^2$ entonces la única posibilidad sería la función idénticamente 0. Como esto no nos sirve a nivel físico, podemos relajar la condición anterior recordando que en el laboratorio solo podemos observar intervalos y pedir

$$\psi^{\epsilon}_{q_0}(q) = 0, \; \forall q \notin [q_0 - \epsilon/2, q_0 + \epsilon/2]. \tag{23}$$

Podemos tomar entonces, por ejemplo,

$$\psi^{\epsilon}_{q_0}(q) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\Theta(\epsilon/2 - |q - q_0|)$$



Se ve que $\psi^{\epsilon}_0(q) \in L^2$ para todo $\epsilon > 0$ y tomando el límite $\epsilon \to 0$ estas funciones convergen a una delta de Dirac (si hubiésemos elegido otro conjunto de funciones que satisfagan esta relación la conlusión hubiese sido la misma)

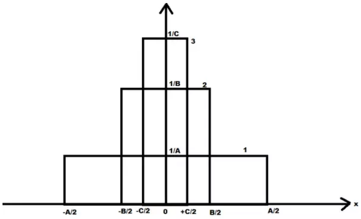
Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Si insistimos en que $\psi_{q_0} \in L^2$ entonces la única posibilidad sería la función idénticamente 0. Como esto no nos sirve a nivel físico, podemos relajar la condición anterior recordando que en el laboratorio solo podemos observar intervalos y pedir

$$\psi^{\epsilon}_{q_0}(q) = 0,\ \forall q \notin [q_0 - \epsilon/2, q_0 + \epsilon/2]. \tag{23}$$

Podemos tomar entonces, por ejemplo,

$$\psi^{\epsilon}_{q_0}(q) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\Theta(\epsilon/2 - |q - q_0|)$$



Se ve que $\psi^{\epsilon}_0(q) \in L^2$ para todo $\epsilon > 0$ y tomando el límite $\epsilon \to 0$ estas funciones convergen a una delta de Dirac (si hubiésemos elegido otro conjunto de funciones que satisfagan esta relación la conlusión hubiese sido la misma) . En la representación de $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ asociaremos entonces a un autovector de $\hat{Q}$ con autovalor q_0 con

$$\boxed{\psi_{q_0}(q) = \langle q|q_0\rangle = \delta(q - q_0)}. \tag{24}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

- Los autovectores de $\hat{P}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = -i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q)$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

- Los autovectores de $\hat{P}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = -i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q)$$

pero como $|p\rangle$ es autovector de $\hat{p}$ tenemos que

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = p\langle q|p\rangle = p\psi_p(q)$$

- Los autovectores de $\hat{P}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = -i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q)$$

pero como $|p\rangle$ es autovector de $\hat{p}$ tenemos que

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = p\langle q|p\rangle = p\psi_p(q)$$

entonces

$$-i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q) = p\psi_p(q)$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

- Los autovectores de $\hat{P}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = -i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q)$$

pero como $|p\rangle$ es autovector de $\hat{p}$ tenemos que

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = p\langle q|p\rangle = p\psi_p(q)$$

entonces

$$-i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q) = p\psi_p(q)$$

$$\implies \psi_p(q) = A_p e^{ipq/\hbar}.$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

- Los autovectores de $\hat{P}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = -i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q)$$

pero como $|p\rangle$ es autovector de $\hat{p}$ tenemos que

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = p\langle q|p\rangle = p\psi_p(q)$$

entonces

$$-i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q) = p\psi_p(q)$$

$$\implies \psi_p(q) = A_p e^{ipq/\hbar}.$$

De nuevo tenemos el problema de que estas funciones $\psi_p \notin L^2$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

- Los autovectores de $\hat{P}$ en esta reresentación vienen dados por

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = -i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q)$$

pero como $|p\rangle$ es autovector de $\hat{p}$ tenemos que

$$\langle q|\hat{P}|p\rangle = p\langle q|p\rangle = p\psi_p(q)$$

entonces

$$-i\hbar\frac{d}{dq}\psi_p(q) = p\psi_p(q)$$

$$\Longrightarrow \ \psi_p(q) = A_p e^{ipq/\hbar}.$$

De nuevo tenemos el problema de que estas funciones $\psi_p \notin L^2$ ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq|\psi_p(q)|^2 = |A_p|^2\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, 1 = \infty,$$

pero las utilizaremos de todas formas por su utilidad práctica. En el laboratorio encontramos que la función de onda de las partículas libres es (dentro de cierto intervalo) muy bien descripta por estas funciones.

Como los autovectores de distinto autovalor deben ser ortogonales, para fijar la normalización tomaremos

$$\delta(p-p') = \langle p|p'\rangle = \langle p|1|p'\rangle = \langle\ p|\int_{\mathbb{R}} dq\,|q\rangle\langle q|p'\rangle$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$

Como los autovectores de distinto autovalor deben ser ortogonales, para fijar la normalización tomaremos

$$\delta(p-p') = \langle p|p'\rangle = \langle p|1|p'\rangle = \langle\ p|\int_{\mathbb{R}} dq\,|q\rangle\langle q|p'\rangle$$

$$= A_p^* A_{p'} \int_{\mathbb{R}} dq\, e^{i(p'-p)q/\hbar} = A_p^* A_{p'} \int_{\mathbb{R}} \hbar dq'\, e^{i(p'-p)q'}$$

Como los autovectores de distinto autovalor deben ser ortogonales, para fijar la normalización tomaremos

$$\delta(p-p') = \langle p|p'\rangle = \langle p|1|p'\rangle = \langle\ p|\int_{\mathbb{R}} dq\,|q\rangle\langle q|p'\rangle$$

$$= A_p^* A_{p'} \int_{\mathbb{R}} dq\, e^{i(p'-p)q/\hbar} = A_p^* A_{p'} \int_{\mathbb{R}} \hbar dq'\, e^{i(p'-p)q'}$$

$$= A_p^* A_{p'} \hbar 2\pi \delta(p-p') = A_p^* A_{p'} \hbar 2\pi \delta(p-p') = |A_p|^2 \hbar 2\pi \delta(p-p')$$

basta tomar $A_p = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$.

Como los autovectores de distinto autovalor deben ser ortogonales, para fijar la normalización tomaremos

$$\delta(p-p') = \langle p|p'\rangle = \langle p|1|p'\rangle = \langle\, p| \int_{\mathbb{R}} dq\, |q\rangle\langle q|p'\rangle$$

$$= A_p^* A_{p'} \int_{\mathbb{R}} dq\, e^{i(p'-p)q/\hbar} = A_p^* A_{p'} \int_{\mathbb{R}} \hbar dq'\, e^{i(p'-p)q'}$$

$$= A_p^* A_{p'} \hbar 2\pi\delta(p-p') = A_p^* A_{p'} \hbar 2\pi\delta(p-p') = |A_p|^2 \hbar 2\pi \delta(p-p')$$

basta tomar $A_p = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$. En la representación de $\{|q\rangle\}_{q\in\mathbb{R}}$ asociamos a los autovectores de $\hat{P}$ con las funciones

$$\boxed{\psi_p(q) = \frac{e^{ipq/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}}. \tag{25}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$

Así, los autovectores del operador $\hat{P}$ vienen dados por

$$|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, |q\rangle\langle q|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, \frac{e^{ipq/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, |q\rangle. \tag{26}$$

Así, los autovectores del operador $\hat{P}$ vienen dados por

$$|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, |q\rangle\langle q|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, \frac{e^{ipq/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, |q\rangle. \tag{26}$$

Estos vectores también forman una base ortonormal y permiten expandir a un vector arbitrario como

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\, |p\rangle\langle p|\psi\rangle. \tag{27}$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$

Así, los autovectores del operador $\hat{P}$ vienen dados por

$$|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, |q\rangle\langle q|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, \frac{e^{ipq/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, |q\rangle. \tag{26}$$

Estos vectores también forman una base ortonormal y permiten expandir a un vector arbitrario como

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\, |p\rangle\langle p|\psi\rangle. \tag{27}$$

Entonces si definimos

$$\bar{\psi}(p) := \langle p|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, \frac{e^{-ipq/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \langle q|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-ipq/\hbar}\, \psi(q), \tag{28}$$

Así, los autovectores del operador $\hat{P}$ vienen dados por

$$|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,|q\rangle\langle q|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,\frac{e^{ipq/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,|q\rangle. \tag{26}$$

Estos vectores también forman una base ortonormal y permiten expandir a un vector arbitrario como

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\,|p\rangle\langle p|\psi\rangle. \tag{27}$$

Entonces si definimos

$$\bar{\psi}(p) := \langle p|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,\frac{e^{-ipq/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\langle q|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\,e^{-ipq/\hbar}\,\psi(q), \tag{28}$$

vemos que la función de onda en la representación de momentos es la transformada de Fourier de la función de onda en la representación de posición.

Operadores Q y P: La representación en $\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$

De esta forma se puede ver que

$$\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, \langle p|q\rangle\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-ipq/\hbar}\, (-i\hbar)\frac{d}{dq}\psi(q)$$

De esta forma se puede ver que

$$\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, \langle p|q\rangle\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-ipq/\hbar}\,(-i\hbar)\frac{d}{dq}\psi(q)$$

$$= i\hbar\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\, \frac{d}{dq}(e^{-ipq/\hbar})\,\psi(q) = p\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-ipq/\hbar}\,\psi(q)$$

Operadores Q y P: La representación en $\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$

De esta forma se puede ver que

$$\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\,\langle p|q\rangle\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-ipq/\hbar}\,(-i\hbar)\frac{d}{dq}\psi(q)$$

$$= i\hbar\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\,\frac{d}{dq}(e^{-ipq/\hbar})\,\psi(q) = p\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-ipq/\hbar}\,\psi(q)$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = p\bar{\psi}(p)}, \tag{29}$$

es decir que la acción de $\hat{P}$ en esta representación es multiplicar por p.

Operadores Q y P: La representación en $\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$

De esta forma se puede ver que

$$\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dq\, \langle p|q\rangle\langle q|\hat{P}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-ipq/\hbar}\,(-i\hbar)\frac{d}{dq}\psi(q)$$

$$= i\hbar\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\, \frac{d}{dq}(e^{-ipq/\hbar})\,\psi(q) = p\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} dq\, e^{-ipq/\hbar}\,\psi(q)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle p|\hat{P}|\psi\rangle = p\bar{\psi}(p)}, \tag{29}$$

es decir que la acción de $\hat{P}$ en esta representación es multiplicar por p.

De hecho uno podría haber repetido las cuentas que hicimos con $\hat{Q}$ y obtener los mismos resultados cambiando $\hat{Q}$ por $\hat{P}$ y i por $(-i)$ (esto último para que el conmutador quede bien). O sea que en la representación de $\{|p\rangle\}_{p\in\mathbb{R}}$ se invierten los roles y $\hat{P}$ actúa como multiplicación mientras que $\hat{Q}$ actúa como derivación.

Ejercicio 19

Probar que

a) $\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dp}\langle p|\psi\rangle$.

Ejercicio 19

Probar que

a) $\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dp}\langle p|\psi\rangle$.

Esto es equivalente a decir que $\hat{X}$ actúa como derivación en la representación de impulso y como dijimos esto ya se deduce de las cuentas que hicimos pero también podemos hacerlo por otro método

Ejercicio 19

Probar que

a) $\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dp}\langle p|\psi\rangle$.

Esto es equivalente a decir que $\hat{X}$ actúa como derivación en la representación de impulso y como dijimos esto ya se deduce de las cuentas que hicimos pero también podemos hacerlo por otro método

$$\boxed{\langle p|\hat{X}|\psi\rangle =} \langle p|\hat{X}\left[\int_{\mathbb{R}} dx\,|x\rangle\langle x|\right]|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\,\langle p|\hat{X}|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

Ejercicio 19

Probar que

a) $\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dp}\langle p|\psi\rangle$.

Esto es equivalente a decir que $\hat{X}$ actúa como derivación en la representación de impulso y como dijimos esto ya se deduce de las cuentas que hicimos pero también podemos hacerlo por otro método

$$\boxed{\langle p|\hat{X}|\psi\rangle =} \langle p|\hat{X}\left[\int_{\mathbb{R}} dx\,|x\rangle\langle x|\right]|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\,\langle p|\hat{X}|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx\, x\langle p|x\rangle\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx\, xe^{-ipx/\hbar}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx\, i\hbar\frac{d}{dp}(e^{-ipx/\hbar})\psi(x)$$

Ejercicio 19

Probar que

a) $\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar\frac{d}{dp}\langle p|\psi\rangle$.

Esto es equivalente a decir que $\hat{X}$ actúa como derivación en la representación de impulso y como dijimos esto ya se deduce de las cuentas que hicimos pero también podemos hacerlo por otro método

$$\boxed{\langle p|\hat{X}|\psi\rangle =} \langle p|\hat{X}\left[\int_{\mathbb{R}} dx\,|x\rangle\langle x|\right]|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\,\langle p|\hat{X}|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx\,x\langle p|x\rangle\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx\,xe^{-ipx/\hbar}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx\,i\hbar\frac{d}{dp}(e^{-ipx/\hbar})\psi(x)$$

$$= i\hbar\frac{d}{dp}\int_{\mathbb{R}} dx\,e^{-ipx/\hbar}\psi(x) = \boxed{i\hbar\frac{d}{dp}\langle p|\psi\rangle}$$

Ejercicio 19

b) $\langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\, \beta^*(p) \frac{d}{dp}\alpha(p)$.

Ejercicio 19

b) $\langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\, \beta^*(p)\frac{d}{dp}\alpha(p)$.

$$\boxed{\langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle =} \langle\beta| \left[\int_{\mathbb{R}} dp\, |p\rangle\langle p|\right] \hat{X}|\alpha\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\, \langle\beta|p\rangle\langle p|\hat{X}|\alpha\rangle$$

Ejercicio 19

b) $\langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\, \beta^*(p) \frac{d}{dp}\alpha(p)$.

$$\boxed{\langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle =} \langle\beta| \left[\int_{\mathbb{R}} dp\, |p\rangle\langle p|\right] \hat{X}|\alpha\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\, \langle\beta|p\rangle\langle p|\hat{X}|\alpha\rangle$$

usando el item anterior obtenemos

$$= \int_{\mathbb{R}} dp\, \langle\beta|p\rangle i\hbar\frac{d}{dp}\langle p|\alpha\rangle = \boxed{\int_{\mathbb{R}} dp\, \beta^*(p)\frac{d}{dp}\alpha(p)}.$$