Clase 07

2. POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

2.1. Postulados

I) A tiempo fijo, el estado de un sistema físico se representa por un vector normalizado en un espacio de Hilbert (separable) $\mathcal{H}$.

rayo: $\quad |\phi\rangle \equiv e^{i\alpha}|\phi\rangle$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$ $\quad$ (vectores que difieren en una fase representan el mismo estado físico)

II) Todo observable del sistema se representa con un operador autoadjunto que actúa sobre $\mathcal{H}$.

III) Los posibles resultados de la medición de un observable son los autovalores del operador autoadjunto que lo representa.

IV) • Espectro discreto no degenerado: si el estado del sistema es $|\psi\rangle$ y se mide A (observable), la probabilidad $P(a_n)$ de hallar el autovalor a_n de A está dada por

$$P(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 ,$$

donde $|u_n\rangle$ es el autovector normalizado correspondiente al autovalor a_n.

• Espectro discreto degenerado: si a_n tiene degeneración g_n, entonces

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i|\psi\rangle|^2 ,$$

donde $\{|u_n^i\rangle\}$ es una base ON del subespacio asociado a a_n.

• Espectro continuo no degenerado: la probabilidad $dP(\alpha)$ de obtener un resultado en el rango $[\alpha, \alpha + d\alpha]$ está dada por

$$dP(\alpha) = |\langle v_\alpha | \psi \rangle|^2 \, d\alpha,$$

siendo $|v_\alpha\rangle$ el autovector correspondiente al autovalor α.

V) Después de medir A y obtener a_n, el estado del sistema cambia inmediatamente de $|\psi\rangle$ a la proyección (normalizada) de $|\psi\rangle$ sobre el subespacio asociado a a_n.

• Si no hay degeneración: $|\psi\rangle \longrightarrow |u_n\rangle$, donde $\hat{A}|u_n\rangle = a_n |u_n\rangle$

• Si hay degeneración: $|\psi\rangle \longrightarrow \dfrac{\hat{P}_{a_n}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_{a_n}|\psi\rangle}}$, donde $\hat{P}_{a_n}$ es el proyector sobre el subespacio asociado a a_n

VI) La evolución temporal del estado del sistema es unitaria. Es decir, si $|\psi(t_0)\rangle$ es el estado a tiempo t_0, el estado a tiempo $t > t_0$ está dado por

operador de evolución

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle,$$

donde $\underbrace{\hat{U}(t,t_0)}$ es un operador unitario $(\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{\mathbb{1}})$

$\hookrightarrow$ acá hay información sobre el

$(\hat{U}(t_0,t_0) = \hat{\mathbb{1}})$

↳ acá hay información sobre el sistema físico particular que estoy estudiando

$(\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{1}})$

Otra forma de este postulado: el estado $|\Psi(t)\rangle$ sale de resolver

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle \\ |\Psi(t)\rangle \big|_{t=t_0} = |\Psi(t_0)\rangle \end{cases}$$

→ Hamiltoniano

Relación entre $\hat{U}$ y $\hat{H}$:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) \\ \hat{U}(t_0, t_0) = \hat{\mathbb{1}} \end{cases}$$

En particular, si $\hat{H}$ no depende de t: $\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)\hat{H}}$.

Ejemplo (P2E21):

[redacted] **Fotón en un cristal.** La representación matricial del hamiltoniano correspondiente a un fotón propagándose en dirección del eje óptico de un cristal de cuarzo, usando como base los estados de polarización lineal (normalizados) en las direcciones x e y, $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, es

$$\begin{pmatrix} 0 & -iE_0 \\ iE_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } E_0 > 0\,.$$

(a) Hallar el espectro de H y los estados de energía definida.

(b) Un fotón ingresa al cristal linealmente polarizado en dirección x a $t = 0$. Encontrar el estado del fotón a todo tiempo posterior y graficar la probabilidad de encontrar al fotón polarizado en la dirección x en función del tiempo.

(c) A $t = t_0 > 0$ se mide la energía y se obtiene la correspondiente al estado fundamental. ¿Qué valores de energía podrán medirse posteriormente y con qué probabilidades? ¿Cómo evoluciona el estado para $t > t_0$?

$B = \{|x\rangle, |y\rangle\}$, $[\hat{H}]_B = H = \begin{pmatrix} 0 & -iE_0 \\ iE_0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_0 > 0$.

↑ base ON

a) • Autovalores: $\det(H - \lambda) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & -iE_0 \\ iE_0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda^2 - E_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - E_0^2 = 0$$

$$\therefore \quad \lambda = \pm E_0$$

- Autovectores: $\quad |u\rangle \,/\, (\hat{H} - \lambda \hat{\mathbb{1}})|u\rangle = 0$

$*\ \lambda = -E_0$

$$(\hat{H} + E_0)|-E_0\rangle = 0 \quad , \quad |-E_0\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} E_0 & -iE_0 \\ iE_0 & E_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 - i u_2 = 0 \rightarrow u_1 = i u_2 \\ i u_1 + u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad |-E_0\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{factor de normalización}$$

$$\therefore \quad |-E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|x\rangle + |y\rangle \right)$$

$*\ \lambda = E_0$

Todo análogo. Se obtiene: $\quad |E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|x\rangle + |y\rangle\right)$.

b) $\quad |\psi(0)\rangle = |x\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,0)|\psi(0)\rangle = \hat{U}(t,0)|x\rangle$$

En este caso, como $\hat{H}$ no depende del tiempo:

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}$$

$$\hat{U}(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$$

Recuerden que si $\hat{A}|u_i\rangle = a_i|u_i\rangle \Rightarrow f(\hat{A})|u_i\rangle = f(a_i)|u_i\rangle$

Conviene escribir a $|\psi(0)\rangle = |x\rangle$ como una combinación lineal de autoestados de $\hat{H}$:

difieren en una fase global así que representan el mismo estado

$$\begin{cases} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(|-E_0\rangle - |E_0\rangle\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-E_0\rangle - |E_0\rangle\right) \\ |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-E_0\rangle + |E_0\rangle\right) \end{cases}$$

$$|\psi(0)\rangle = |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-E_0\rangle - |E_0\rangle\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}|\psi(0)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}|-E_0\rangle - e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}|E_0\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}t(-E_0)}|-E_0\rangle - e^{-\frac{i}{\hbar}tE_0}|E_0\rangle\right)$$

¿Probabilidad de encontrar al fotón polarizado en la dirección $|x\rangle$?

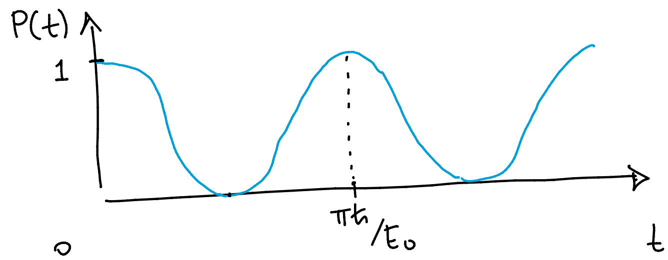
$$P_{pol.=|x\rangle}(t) = \left|\langle x|\psi(t)\rangle\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{+\frac{i}{\hbar}tE_0}\overbrace{\langle x|-E_0\rangle}^{1/\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}tE_0}\overbrace{\langle x|E_0\rangle}^{-1/\sqrt{2}}\right|^2 =$$

$$= \left|\frac{e^{\frac{i}{\hbar}tE_0} + e^{-\frac{i}{\hbar}tE_0}}{2}\right|^2 =$$

$$= \cos^2\left(\frac{E_0 t}{\hbar}\right)$$

$$\therefore \quad P_{pol.=|x\rangle}(t) = \cos^2\left(\frac{E_0 t}{\hbar}\right)$$



c) $|\psi(t)\rangle \xrightarrow[\text{mido } \hat{H} \text{ y obtengo } -E_0]{} |-E_0\rangle \leftarrow$ estado del sistema inmediatamente luego de la medición

Luego de un tiempo Δt el estado del sistema sigue siendo $|-E_0\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow$ El valor de energía que puedo obtener es $-E_0$ (con 100% de probabilidad)