Física Teórica 2

Guía 2: Ejemplos con spin 1/2

Mateo Koifman

10 de septiembre de 2021

Índice

Postulados de la mecánica cuántica (Ver clase 7 del 07/09)

La clase pasada vimos los postulados de la mecánica cuántica. Repasemos rápido lo más importante que necesitamos para resolver los problemas que siguen.

En el caso no degenerado:
Dado un estado inicial $|\psi\rangle$

3. Los resultados posibles al medir A, son sus autovalores a_n.
4. La probabilidad de medir A y obtener un resultado a_n es

$$P(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 \tag{1}$$

   donde $|u_n\rangle$ es el autoestado de A asociado a a_n.
   Como consecuencia, el valor medio de A es

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \tag{2}$$

5. Después de medir A y obtener a_n, el estado inicial $|\psi\rangle$ *colapsa* instantáneamente en $|u_n\rangle$.

$$|\psi\rangle \quad \longrightarrow \quad |u_n\rangle \tag{3}$$

6. La evolución temporal es generada por el Hamiltoniano. En particular, para **problemas independientes del tiempo**, $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ y los estados evolucionan según

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle \tag{4}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{|S_x;+\rangle, |S_x;-\rangle\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{5}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \{|S_y;+\rangle, |S_y;-\rangle\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} \tag{6}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \{|S_z;+\rangle, |S_z;-\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{7}$$

Para el operador de spin en la dirección de un versor arbitrario $\mathbf{n} = (\cos\alpha\ \sin\beta, \sin\alpha\ \sin\beta, \cos\beta)$

$$|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n};+\rangle = \cos(\beta/2)\,|+\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)\,|-\rangle\,. \tag{8}$$

Recordar: Los estados están unívocamente definidos a menos de una fase global. Es decir, por ejemplo $|S_y;-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$

Problema 24

$\boxed{24}$ Un sistema de dimensión 2 está en un autoestado de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ (ver ejercicio 11 de la guía 1) con autovalor $\hbar/2$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en el plano xz que forma un ángulo γ con el eje positivo z.

(a) Si se mide S_z, ¿cuál es la probabilidad de obtener $\hbar/2$? Verifique que los casos $\gamma = 0, \pi/2$ tienen sentido. Responder la misma pregunta si lo que se mide es S_x.

(b) Suponer ahora que al realizar una medición de S_x se obtuvo el valor $-\hbar/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir S_z inmediatamente después se obtenga también $-\hbar/2$?

a) Cuál es la probabilidad de obtener $S_z = \hbar/2$? Responder la misma pregunta si lo que se mide es S_x

Habíamos visto (ej. 14.d) que el autoestado de $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}(t)$ con autovalor $+\hbar/2$ es

$$|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n};+\rangle = \cos(\beta/2)\,|+\rangle + e^{i\alpha}\sin(\beta/2)\,|-\rangle \tag{9}$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}\cdot\mathbf{n};+\rangle &= \cos(\gamma/2)\,|+\rangle + \sin(\gamma/2)\,|-\rangle \\ |S_z;+\rangle &= |+\rangle \\ |S_x;+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|+\rangle + |-\rangle\,\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(S_z;+\hbar/2) &= \Big| \langle S_z;+|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n};+\rangle \Big|^2 \\
&= \Big| \langle +| \Big(\cos(\gamma/2)\,|+\rangle + \sin(\gamma/2)\,|-\rangle \Big) \Big|^2 \\
&= \cos^2(\gamma/2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(S_x;+\hbar/2) &= \Big| \langle S_x;+|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n};+\rangle \Big|^2 \\
&= \Big| \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle +| + \langle -| \Big) \Big(\cos(\gamma/2)\,|+\rangle + \sin(\gamma/2)\,|-\rangle \Big) \Big|^2 \\
&= \frac{1}{2}\Big|\Big(\cos(\gamma/2) + \sin(\gamma/2)\Big)\Big|^2 = \sin^2\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

b) Suponer ahora que al realizar una medición de S_x se obtuvo el valor $-\hbar/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir S_z inmediatamente después se obtenga también $-\hbar/2$?

$$|\mathbf{S}\cdot\mathbf{n};+\rangle \quad\longrightarrow\quad |S_x;-\rangle \quad\longrightarrow\quad |S_z;-\rangle \tag{10}$$

Pensemos primero en un problema parecido:

b') Suponer que el sistema se encuentra en el estado $|S_x;-\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir S_z inmediatamente después se obtenga también $-\hbar/2$?

Como consecuencia del postulado 5 que nos habla del colapso del estado cuando realizamos mediciones, los problemas b') y b) son equivalentes. No nos preocupamos por la probabilidad de obtener $S_x = -\hbar/2$ en la primera medición.

$$\begin{aligned}
P(S_z,-) &= \Big|\,\langle S_z;-|S_x;-\rangle\,\Big|^2 \\
&= \Big|\,\langle -|\;\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,|+\rangle-|-\rangle\,\Big)\Big|^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{11}$$

Atención: Es importante que los estados estén normalizados para llegar al resultado correcto.

Problema 25

$\boxed{25}$ **Precesión del espín.** El hamiltoniano de un sistema de espín 1/2 en un campo magnético externo uniforme B en la dirección z está dado por

$$H = -\left(\frac{eB}{mc}\right) S_z = -\omega S_z \ .$$

(a) Verificar que los autoestados de S_z $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son también autoestados de la energía, y calcular los correspondientes autovalores.

(b) Suponer que a $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$ (que corresponde al estado $|S_x, +\rangle$). Hallar la evolución temporal $|\alpha(t)\rangle$ de dicho estado. ¿Qué resultados pueden obtenerse al medir S_x a un tiempo posterior? ¿Con qué probabilidades?

(c) Calcular $\langle S_x\rangle$ y $\langle S_y\rangle$ en función del tiempo (Esta rotación de los valores de expectación da cuenta de la *precesión del espín*).

(d) Encontrar el versor $\hat{\mathbf{n}}(t)$ para el cual $|\alpha(t)\rangle$ resulta ser autoestado de $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t)$.

a) Verifcar que los autoestados de S_z $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son también autoestados de la energía, y calcular los correspondientes autovalores.

$$H|+\rangle = -\omega S_z|+\rangle = -\frac{\hbar}{2}\omega|+\rangle \qquad E_+ = -\frac{\hbar}{2}\omega \tag{12}$$

$$H|-\rangle = -\omega S_z|-\rangle \ = \ \frac{\hbar}{2}\omega|+\rangle \qquad E_- \ = \ \frac{\hbar}{2}\omega \tag{13}$$

Recordemos que $[H, S_z] = 0$, por lo tanto necesariamete H y S_z debían tener una base común de autoestados.

b) Hallar la evolución temporal $|\alpha(t)\rangle$ del estado inicial. ¿Qué resultados y con qué probabilidades pueden obtenerse al medir S_x a un tiempo posterior?

$$\text{Dado } |\alpha(0)\rangle \quad \longrightarrow \quad |\alpha(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}\,|\alpha(0)\rangle$$

donde vale que el operador de evolución temporal $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ ya que H no depende de t.

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-iHt/\hbar}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iHt/\hbar}\,|+\rangle + e^{-iHt/\hbar}\,|-\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\omega t/2}\,|+\rangle + e^{-i\omega t/2}\,|-\rangle\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Propiedad: en el último paso utilizamos

$$\boxed{\hat{A}\,|\alpha_j\rangle = \alpha_j\,|\alpha_j\rangle \quad \Rightarrow \quad f(\hat{A})\,|\alpha_j\rangle = f(\alpha_j)\,|\alpha_j\rangle} \tag{15}$$

Demostración: $\quad f(\hat{A})\,|\alpha_j\rangle = \sum_i f(\alpha_i)\,|\alpha_i\rangle\,\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle = \sum_i f(\alpha_i)\,|\alpha_i\rangle\,\delta_{ij} = f(\alpha_j)\,|\alpha_j\rangle$
(ver ejercicio 12.d)

$$
\begin{aligned}
P(S_x;+) &= \Big|\, \langle S_x;+|\alpha(t)\rangle \,\Big|^2 \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle +| + \langle -| \Big) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\omega t/2}\,|+\rangle + e^{-i\omega t/2}\,|-\rangle \right) \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{2} \left(e^{i\omega t/2} + e^{-i\omega t/2} \right) \right|^2 \\
&= \cos^2(\omega t/2)
\end{aligned}
$$

Tarea: Mostrar $P(S_x;-) = \sin^2(\omega t/2)$

c) Calcular $\langle S_x \rangle$ y $\langle S_y \rangle$ en función del tiempo

$$
\begin{aligned}
\langle S_x \rangle (t) &= \langle \alpha(t) | S_x | \alpha(t) \rangle \\
&= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t/2}\langle +| + e^{i\omega t/2}\langle -|\right)\Big(|-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -|\Big)\left(e^{i\omega t/2}|+\rangle + e^{-i\omega t/2}|-\rangle\right) \\
&= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t/2}\langle +| + e^{i\omega t/2}\langle -|\right)\left(e^{i\omega t/2}|-\rangle + e^{-i\omega t/2}|+\rangle\right) \\
&= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

Tarea: Mostrar

$$
\langle S_y \rangle (t) = -\frac{\hbar}{2}\sin(\omega t) \tag{16}
$$

Comentario: Siempre es posible también trabajar en notación matricial cuando nos resulte más cómodo. Es equivalente. Por ejemplo

$$
\langle S_x \rangle (t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} \\ e^{-i\omega t/2} \end{pmatrix} \tag{17}
$$

d) Encontrar el versor $\mathbf{n}(t)$ para el cual $|\alpha(t)\rangle$ resulta ser autoestado de $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}(t)$.

$$\begin{aligned}
|\alpha(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\omega t/2} |+\rangle + e^{-i\omega t/2} |-\rangle \right) \\
&= e^{i\omega t/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle + e^{-i\omega t} |-\rangle \right) \\
&= e^{i\omega t/2} \left(\cos(\pi/4) |+\rangle + e^{-i\omega t} \sin(\pi/4) |-\rangle \right)
\end{aligned}$$

Podemos reconocer $\alpha = -\omega t$, $\beta = \pi/2$