Clase 09

Efecto Zeno cuántico (P2E28)

$t=0$: estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |\phi\rangle$, $\quad \hat{O}|\phi\rangle = \underbrace{\lambda}_{\text{suponemos que es no degenerado}}|\phi\rangle$ ($\hat{O}$ → observable)

$\hat{H}$: Hamiltoniano del sistema (suponemos que es independiente del tiempo)

a) $|\Psi(0)\rangle = |\phi\rangle$

$|\Psi(t)\rangle \longrightarrow$ estado del sistema a tiempo t

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}|\Psi(0)\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}|\phi\rangle$$

$$P(\lambda) = |\langle\phi|\Psi(t)\rangle|^2 \quad \text{(prob. de medir } \lambda \text{ a tiempo } t\text{)}$$

Para t pequeño:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{it}{\hbar}\hat{H}}|\phi\rangle = \left(\hat{\mathbb{1}} - \frac{it}{\hbar}\hat{H} - \frac{t^2}{2\hbar^2}\hat{H}^2 + O(t^3)\right)|\phi\rangle \overset{t \text{ pequeño}}{\approx}$$

$$\approx \left(\hat{\mathbb{1}} - \frac{it}{\hbar}\hat{H} - \frac{t^2}{2\hbar^2}\hat{H}^2\right)|\phi\rangle$$

$$\langle\phi|\Psi(t)\rangle = \langle\phi|\phi\rangle - \frac{it}{\hbar}\langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2}\langle\phi|\hat{H}^2|\phi\rangle =$$

$$= 1 - \frac{it}{\hbar}\langle\hat{H}\rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2}\langle\hat{H}^2\rangle$$

conservo sólo términos hasta orden t^2

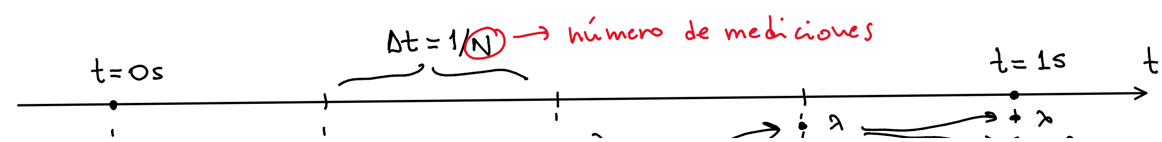
$$|\langle\phi|\Psi(t)\rangle|^2 = \left(1 - \frac{it}{\hbar}\langle\hat{H}\rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2}\langle\hat{H}^2\rangle\right)\left(1 + \frac{it}{\hbar}\langle\hat{H}\rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2}\langle\hat{H}^2\rangle\right) =$$

$$= 1 + \frac{t^2}{\hbar^2}\langle\hat{H}\rangle^2 - \frac{t^2}{\hbar^2}\langle\hat{H}^2\rangle = 1 - \frac{t^2}{\hbar^2}(\Delta H)^2 = P(\lambda)$$

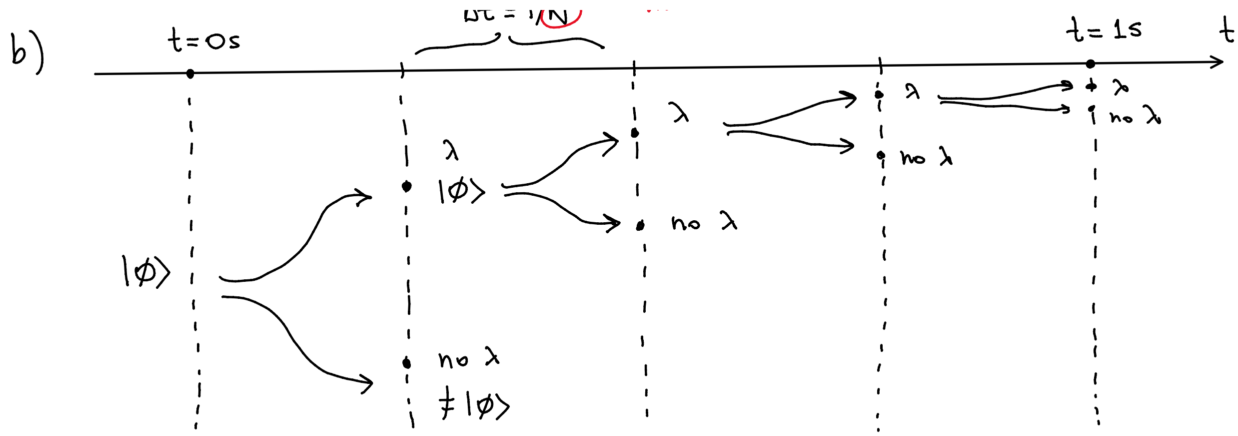
$$(\Delta H)^2 = \langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2$$

$$\therefore P(\neq\lambda) = 1 - P(\lambda) = \frac{t^2(\Delta H)^2}{\hbar^2} \propto t^2 \quad \text{(para } t \text{ pequeño)}$$

b)



b)



Vamos a ver que la probabilidad de que ocurra la situación en la que cada vez que mido $\mathcal{O}$ obtengo λ es 1 si $\Delta t \to 0$:

$$\overbrace{P(\lambda)\,P(\lambda)\ldots P(\lambda)}^{N} = \left[1 - \frac{(\Delta t)^2}{\hbar^2}(\Delta H)^2\right]^N \overset{\Delta t = 1/N}{=} \left(1 - \frac{\beta}{N^2}\right)^N, \quad \text{con } \beta \equiv \left(\frac{\Delta H}{\hbar}\right)^2$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[P(\lambda)\,P(\lambda)\ldots P(\lambda)\right] = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{\beta}{N^2}\right)^N \underset{M \equiv N^2}{=} \lim_{M\to\infty}\left(1 - \frac{\beta}{M}\right)^{\sqrt{M}} =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{\beta}{M}\right)^{M/\sqrt{M}}}_{x}$$

$$\log x = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{M}} \log \underbrace{\left(1 - \frac{\beta}{M}\right)^M}_{\substack{\text{cuando } M\to\infty \\ \text{tiende a } e^{-\beta}}}}_{\to -\beta} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0 \implies x \to 1$$

$$\therefore \; P(\lambda)\,P(\lambda)\ldots P(\lambda) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$

$\therefore$ Probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|\phi\rangle$ a $t = 1s$ es 1.

2.2. Producto tensorial de espacios de Hilbert

Motivación: describir sistemas compuestos

<u>Definición:</u> $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ EH. Definimos el <u>producto tensorial</u> $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ entre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ como el conjunto (completado de)

$$E = \left\langle \left\{ |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \ : \ |\varphi_1\rangle \in \mathcal{H}_1, |\varphi_2\rangle \in \mathcal{H}_2 \right\} \right\rangle .$$

(El completado de) E es un espacio de Hilbert con PI dado por:

$$\left(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle , |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \right) \equiv \langle \varphi_1 | \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \cdot \langle \varphi_2 | \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

(y extendido por bilinealidad).

<u>Observaciones:</u>

* Si tenemos $\left\{ \begin{array}{l} \{|u_i\rangle\}_i \ \text{base de } \mathcal{H}_1 \\ \{|v_j\rangle\}_j \ \text{base de } \mathcal{H}_2 \end{array} \right\}$ entonces $\left\{ |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle \right\}_{ij}$ es una base de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Entonces: $\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim(\mathcal{H}_1) \cdot \dim(\mathcal{H}_2)$

* $\hat{A} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, $\hat{B} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$

$$\hat{A} \otimes \hat{B} : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

$$\hat{A} \otimes \hat{B} \left(\sum_{i,j} c_{ij} |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle \right) = \sum_{i,j} c_{ij} \left(\hat{A} |u_i\rangle \right) \otimes \left(\hat{B} |v_j\rangle \right)$$

* Habrá operadores que no se escriben como un producto de op. en $\mathcal{H}_1$ por op. en $\mathcal{H}_2$ (van a aparecer en el curso).

op. en $\mathcal{H}_2$ (van a aparecer en el curso).

$*$ Caso particular $\hat{B} = \hat{\mathbb{1}}_{\mathcal{H}_2}$

$$\hat{A} \otimes \hat{\mathbb{1}} \leftarrow \text{ a veces lo vamos a llamar } \hat{A}$$

(se entiende que actúa trivialmente sobre $\mathcal{H}_2$)

<u>Ejemplo</u> (P2E29): Un estado de polarización de dos fotones está dado por:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 + |y\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \right)$$

Demostrar que este estado está <u>entrelazado</u>. Es decir, quiero ver que no existen $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ tales que

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Para ver si esto es posible o no planteamos:

$$|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow |\psi_1\rangle = a_x |x\rangle_1 + a_y |y\rangle_1$$

$$|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2 \Rightarrow |\psi_2\rangle = b_x |x\rangle_2 + b_y |y\rangle_2$$

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \left(a_x |x\rangle_1 + a_y |y\rangle_1 \right) \otimes \left(b_x |x\rangle_2 + b_y |y\rangle_2 \right) =$$

$$= a_x b_x |x\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 + a_x b_y |x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 +$$

pido que sea igual a $|\psi\rangle$

$$+ a_y b_x |y\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 + a_y b_y |y\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 = |\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 + |y\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x b_x = 0 \\ a_x b_y = 1/\sqrt{2} \\ a_y b_x = 1/\sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ no tiene solución } \Rightarrow \nexists\ |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \,/\, |\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x b_y = 1/\sqrt{2} \\ a_y b_x = 1/\sqrt{2} \\ a_y b_y = 0 \end{array} \right\} \text{ no tiene solución } \Rightarrow \nexists\, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \,/\, |\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

$\therefore$ $|\psi\rangle$ está entrelazado.

Ejemplo (P2E30): Calcular la probabilidad de obtener $-E_0$ al medir la energía del fotón 1 $(\hat{H}_1 = \hat{H} \otimes \hat{\mathbb{1}})$

↳ $\hat{H}$ del ejercicio 21

Recordemos los autoestados de $\hat{H}$:

$$\underbrace{|-E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|x\rangle + |y\rangle)}_{\text{autovalor } -E_0} \quad , \quad \underbrace{|E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|x\rangle + |y\rangle)}_{\text{autovalor } E_0}$$

Veamos que $-E_0$ es autovalor de $\hat{H} \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$ con degeneración 2:

$$(\hat{H} \otimes \hat{\mathbb{1}}_2)(|-E_0\rangle \otimes \overset{\text{arbitrario}}{|\chi\rangle_2}) = (\hat{H}|-E_0\rangle) \otimes (\hat{\mathbb{1}}_2|\chi\rangle_2) =$$

$$= (-E_0|-E_0\rangle) \otimes |\chi\rangle_2 = -E_0 (|-E_0\rangle \otimes |\chi\rangle_2)$$

Como $|\chi\rangle_2$ es un vector arbitrario de $\mathcal{H}_2$ (que tiene $\dim(\mathcal{H}_2) = 2$), $-E_0$ es autovalor de $\hat{H} \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$ con degeneración 2.

Usando los postulados:

$$P_{-E_0} = |\langle -E_0, 1|\psi\rangle|^2 + |\langle -E_0, 2|\psi\rangle|^2$$

autoestados de autovalor $-E_0$

autoestados de autovalor $-E_0$
para $\hat{H} \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$ que sean ortonormales

Elijo: $|-E_0, 1\rangle = |-E_0\rangle \otimes |x\rangle_2$
$|-E_0, 2\rangle = |-E_0\rangle \otimes |y\rangle_2$ } son ortonormales

$$|-E_0, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i|x\rangle_1 + |y\rangle_1 \right) \otimes |x\rangle_2$$

$$|-E_0, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i|x\rangle_1 + |y\rangle_1 \right) \otimes |y\rangle_2$$

Entonces:
$$P_{-E_0} = \left| \left(\frac{-i\langle x|_1 + \langle y|_1}{\sqrt{2}} \otimes \langle x|_2 \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 + |y\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \right) \right|^2 +$$

$$+ \left| \left(\frac{-i\langle x|_1 + \langle y|_1}{\sqrt{2}} \otimes \langle y|_2 \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|x\rangle_1 \otimes |y\rangle_2 + |y\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \right) \right|^2 =$$

$$= \ldots = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Usar que:
$$\left(\langle a| \otimes \langle b| \right) \left(|c\rangle \otimes |d\rangle \right) = \langle a|c\rangle . \langle b|d\rangle$$