Física Teórica 2 - Práctica

Representación de Heisenberg.

Temas a ver:

1. Repaso: Evolución temporal, representación de Schrödinger y Heisenberg.

Temas a ver:

1. Repaso: Evolución temporal, representación de Schrödinger y Heisenberg.
2. Problema 33

Temas a ver:

1. Repaso: Evolución temporal, representación de Schrödinger y Heisenberg.
2. Problema 33
3. Problema 35

Representación de Heisenberg

<u>Temas a ver:</u>

1. Repaso: Evolución temporal, representación de Schrödinger y Heisenberg.
2. Problema 33
3. Problema 35

Representación de Heisenberg

Los estados de un sistema cuantico vienen dados por un vector en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Así cada estado inicial $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ a tiempo t_0 evoluciona instante a instante a través de la ecuación de Schrôdinger en otro $|\psi(t)\rangle$ a tiempo t. Así tenemos un mapa de $\hat{U}(t, t_0) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle$.

Representación de Heisenberg

Los estados de un sistema cuantico vienen dados por un vector en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Así cada estado inicial $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ a tiempo t_0 evoluciona instante a instante a través de la ecuación de Schrôdinger en otro $|\psi(t)\rangle$ a tiempo t. Así tenemos un mapa de $\hat{U}(t, t_0) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle$.

Por definición este mapa es un operador que debe satisfacer

$$\hat{U}(t_0, t_0)|\psi_0\rangle = |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle, \forall|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$$

Representación de Heisenberg

Los estados de un sistema cuantico vienen dados por un vector en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Así cada estado inicial $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ a tiempo t_0 evoluciona instante a instante a través de la ecuación de Schrôdinger en otro $|\psi(t)\rangle$ a tiempo t. Así tenemos un mapa de $\hat{U}(t, t_0) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle$.

Por definición este mapa es un operador que debe satisfacer

$$\hat{U}(t_0, t_0)|\psi_0\rangle = |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle, \forall|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\implies \hat{U}(t_0, t_0) = 1. \tag{1}$$

Los estados de un sistema cuantico vienen dados por un vector en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Así cada estado inicial $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ a tiempo t_0 evoluciona instante a instante a través de la ecuación de Schrôdinger en otro $|\psi(t)\rangle$ a tiempo t. Así tenemos un mapa de $\hat{U}(t, t_0) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle$.

Por definición este mapa es un operador que debe satisfacer

$$\hat{U}(t_0, t_0)|\psi_0\rangle = |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle, \forall|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\implies \hat{U}(t_0, t_0) = 1. \tag{1}$$

Además usando la ecuación de Schrödinger podemos escribir una ecuación para este operador de evolución temporal

Representación de Heisenberg

Los estados de un sistema cuantico vienen dados por un vector en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Así cada estado inicial $|\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ a tiempo t_0 evoluciona instante a instante a través de la ecuación de Schrôdinger en otro $|\psi(t)\rangle$ a tiempo t. Así tenemos un mapa de $\hat{U}(t, t_0) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle$.

Por definición este mapa es un operador que debe satisfacer

$$\hat{U}(t_0, t_0)|\psi_0\rangle = |\psi(t_0)\rangle = |\psi_0\rangle, \forall |\psi_0\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\implies \hat{U}(t_0, t_0) = 1. \tag{1}$$

Además usando la ecuación de Schrödinger podemos escribir una ecuación para este operador de evolución temporal

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle &= -\frac{i}{\hbar}H(t)|\psi(t)\rangle \\ \frac{d}{dt}\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle &= -\frac{i}{\hbar}H(t)\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle, \forall |\psi_0\rangle \in \mathcal{H} \\ \implies & \boxed{\frac{d}{dt}\hat{U}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t)\hat{U}(t, t_0)}, \end{aligned} \tag{2}$$

siendo 1 la condición inicial de esta ecuación diferencial.

Representación de Heisenberg

Hasta ahora hemos usado la representación de Schrödinger en el cual los estados evolucionan según

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle, \tag{3}$$

mientras que los operadores (si bien puede depender explícitamente del tiempo) no evolucionan en el tiempo.

Representación de Heisenberg

Hasta ahora hemos usado la representación de Schrödinger en el cual los estados evolucionan según

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle, \tag{3}$$

mientras que los operadores (si bien puede depender explícitamente del tiempo) no evolucionan en el tiempo.

Sin embargo, dado que todo lo que podemos observar en el laboratorio son valores medios de algún observable $\hat{A}_S$ y estos vienen entonces dados por

$$\langle\psi(t)|_S \hat{A}_S |\psi(t)\rangle_S = \left(\langle\psi_0|_S \hat{U}^\dagger(t, t_0)\right) \hat{A}_S \left(\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle_S\right),$$

Representación de Heisenberg

Hasta ahora hemos usado la representación de Schrödinger en el cual los estados evolucionan según

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle, \tag{3}$$

mientras que los operadores (si bien puede depender explícitamente del tiempo) no evolucionan en el tiempo.

Sin embargo, dado que todo lo que podemos observar en el laboratorio son valores medios de algún observable $\hat{A}_S$ y estos vienen entonces dados por

$$\langle\psi(t)|_S \hat{A}_S |\psi(t)\rangle_S = \left(\langle\psi_0|_S \hat{U}^\dagger(t, t_0)\right) \hat{A}_S \left(\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle_S\right),$$

podríamos considerar otra representación en la cual los operadores evolucionan en el tiempo según

$$\boxed{\hat{A}_H(t) := \hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{A}_S \hat{U}(t, t_0)} \tag{4}$$

Representación de Heisenberg

Hasta ahora hemos usado la representación de Schrödinger en el cual los estados evolucionan según

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle, \tag{3}$$

mientras que los operadores (si bien puede depender explícitamente del tiempo) no evolucionan en el tiempo.

Sin embargo, dado que todo lo que podemos observar en el laboratorio son valores medios de algún observable $\hat{A}_S$ y estos vienen entonces dados por

$$\langle\psi(t)|_S \hat{A}_S |\psi(t)\rangle_S = \left(\langle\psi_0|_S \hat{U}^\dagger(t, t_0)\right) \hat{A}_S \left(\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle_S\right),$$

podríamos considerar otra representación en la cual los operadores evolucionan en el tiempo según

$$\boxed{\hat{A}_H(t) := \hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{A}_S\hat{U}(t, t_0)} \tag{4}$$

mientras que los estados permanecen constantes en el tiempo

$$|\psi(t)\rangle_H := |\psi_0\rangle_S. \tag{5}$$

Representación de Heisenberg

Hasta ahora hemos usado la representación de Schrödinger en el cual los estados evolucionan según

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle, \tag{3}$$

mientras que los operadores (si bien puede depender explícitamente del tiempo) no evolucionan en el tiempo.

Sin embargo, dado que todo lo que podemos observar en el laboratorio son valores medios de algún observable $\hat{A}_S$ y estos vienen entonces dados por

$$\langle\psi(t)|_S \hat{A}_S|\psi(t)\rangle_S = \left(\langle\psi_0|_S \hat{U}^\dagger(t, t_0)\right) \hat{A}_S \left(\hat{U}(t, t_0)|\psi_0\rangle_S\right),$$

podríamos considerar otra representación en la cual los operadores evolucionan en el tiempo según

$$\boxed{\hat{A}_H(t) := \hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{A}_S\hat{U}(t, t_0)} \tag{4}$$

mientras que los estados permanecen constantes en el tiempo

$$|\psi(t)\rangle_H := |\psi_0\rangle_S. \tag{5}$$

Se ve que

$$\boxed{\langle\psi(t)|_S \hat{A}_S|\psi(t)\rangle_S = \langle\psi_0|_H \hat{A}_H(t)|\psi_0\rangle_H}, \tag{6}$$

o sea que las predicciones físicas de ambos formalismos matemáticos son las mismas.

Representación de Heisenberg

Así como tenemos una ecuación de evolución temporal para los estados en el picture de Schrödinger podemos obtener una ecuación análoga para la evolución de los operadores en el picture de Heisenberg calculando

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) &= \frac{d}{dt}\left[\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\hat{U}(t,t_0)\right] \\
&= \left[\frac{d}{dt}\hat{U}^\dagger(t,t_0)\right]\hat{A}_S(t)\hat{U}(t,t_0) + \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\left[\frac{d}{dt}\hat{U}(t,t_0)\right] \\
&+ \hat{U}^\dagger(t,t_0)\left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]\hat{U}(t,t_0)
\end{aligned}
$$

Representación de Heisenberg

Así como tenemos una ecuación de evolución temporal para los estados en el picture de Schrödinger podemos obtener una ecuación análoga para la evolución de los operadores en el picture de Heisenberg calculando

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) &= \frac{d}{dt}\left[\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\hat{U}(t,t_0)\right]\\ &= \left[\frac{d}{dt}\hat{U}^\dagger(t,t_0)\right]\hat{A}_S(t)\hat{U}(t,t_0) + \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\left[\frac{d}{dt}\hat{U}(t,t_0)\right]\\ &+ \hat{U}^\dagger(t,t_0)\left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]\hat{U}(t,t_0)\end{aligned}$$

usando la ecuación para el operador de evolución tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) =& \left[\frac{i}{\hbar}\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{H}(t)\right]\hat{A}_S(t)\hat{U}(t,t_0) + \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t)\hat{U}(t,t_0)\right]\\ &+ \hat{U}^\dagger(t,t_0)\left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]\hat{U}(t,t_0)\\ =&\frac{i}{\hbar}\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{H}(t)\hat{U}(t,t_0)\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\hat{U}(t,t_0)\\ &- \frac{i}{\hbar}\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\hat{U}(t,t_0)\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{H}(t)\hat{U}(t,t_0) + \hat{U}^\dagger(t,t_0)\left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]\hat{U}(t,t_0)\end{aligned}$$

usando la definición de operador en el picture de Heisenberg

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar}\hat{H}_H(t)\hat{A}_H(t) - \frac{i}{\hbar}\hat{A}_H(t)\hat{H}_H(t) + \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H} \tag{7}$$

Esta es la ecuación de Heisenberg.

usando la definición de operador en el picture de Heisenberg

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{i}{\hbar}\hat{H}_H(t)\hat{A}_H(t) - \frac{i}{\hbar}\hat{A}_H(t)\hat{H}_H(t) + \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H} \tag{7}$$

Esta es la ecuación de Heisenberg.

Esta ecuación se resuelve usando la condición inicial

$$\hat{A}_H(t_0) = \hat{U}^\dagger(t_0, t_0)\hat{A}_S(t_0)\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{A}_S(t_0). \tag{8}$$

Mecánica clásica: Sistema con coodenadas canónica q, momento conjugado p y hamiltoniano $H(q,p,t)$. Teníamos las ecuaciones de hamilton

$$\frac{d}{dt}q = \frac{\partial}{\partial p}H \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}p = -\frac{\partial}{\partial q}H \tag{10}$$

Representación de Heisenberg

Mecánica clásica: Sistema con coodenadas canónica q, momento conjugado p y hamiltoniano $H(q, p, t)$. Teníamos las ecuaciones de hamilton

$$\frac{d}{dt} q = \frac{\partial}{\partial p} H \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} p = -\frac{\partial}{\partial q} H \tag{10}$$

Definiendo el corchete de Poisson para funciones $f = f(q, p, t)$ y $g = g(q, p, t)$ como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} \tag{11}$$

Representación de Heisenberg

Mecánica clásica: Sistema con coodenadas canónica q, momento conjugado p y hamiltoniano $H(q, p, t)$. Teníamos las ecuaciones de hamilton

$$\frac{d}{dt} q = \frac{\partial}{\partial p} H \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} p = -\frac{\partial}{\partial q} H \tag{10}$$

Definiendo el corchete de Poisson para funciones $f = f(q, p, t)$ y $g = g(q, p, t)$ como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} \tag{11}$$

tenemos que

$$\frac{d}{dt} q = \{q, H\} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt} p = \{p, H\}. \tag{13}$$

Representación de Heisenberg

Mientras que un observable clásico viene dado por una función de la forma $f = f(q, p, t)$ que evoluciona según

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(q,p,t) &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{d}{dt}q + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{d}{dt}p + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (14) \\ &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &\implies \boxed{\frac{d}{dt} f(q,p,t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}} \qquad (15) \end{aligned}$$

Representación de Heisenberg

Mientras que un observable clásico viene dado por una función de la forma $f = f(q, p, t)$ que evoluciona según

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(q,p,t) &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{d}{dt}q + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{d}{dt}p + \frac{\partial f}{\partial t} && (14) \\ &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \implies & \quad \boxed{\frac{d}{dt} f(q,p,t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}} && (15) \end{aligned}$$

Comparando con

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H \tag{16}$$

Mientras que un observable clásico viene dado por una función de la forma $f = f(q, p, t)$ que evoluciona según

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(q,p,t) &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{d}{dt}q + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{d}{dt}p + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (14)\\ &= \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t}\\ \Longrightarrow &\quad \boxed{\frac{d}{dt}f(q,p,t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}} \qquad (15)\end{aligned}$$

Comparando con

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H \qquad (16)$$

Cuantización canónica:

$$A \to \hat{A}$$

$$\{\ ,\ \} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$$

Propiedades

- Distributivo con respecto a la suma

$$\hat{C}_S = \hat{A}_S + \hat{B}_S$$

Representación de Heisenberg

Propiedades

- Distributivo con respecto a la suma

$$\hat{C}_S = \hat{A}_S + \hat{B}_S$$

$$\hat{C}_H = \hat{U}^\dagger(t, t_0)\left(\hat{A}_S + \hat{B}_S\right)\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{A}_S\hat{U}(t, t_0) + \hat{U}^\dagger(t, t_0)\hat{B}_S\hat{U}(t, t_0)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{C}_H = \hat{A}_H + \hat{B}_H} \tag{17}$$

- Distributivo con respecto a al producto

$$\hat{C}_S = \hat{A}_S\hat{B}_S$$

Propiedades

- Distributivo con respecto a la suma

$$\hat{C}_S = \hat{A}_S + \hat{B}_S$$

$$\hat{C}_H = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\left(\hat{A}_S + \hat{B}_S\right)\hat{U}(t,t_0) = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S\hat{U}(t,t_0) + \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{B}_S\hat{U}(t,t_0)$$

$$\implies \boxed{\hat{C}_H = \hat{A}_H + \hat{B}_H} \tag{17}$$

- Distributivo con respecto a al producto

$$\hat{C}_S = \hat{A}_S\hat{B}_S$$

$$\begin{aligned}\hat{C}_H(t) &= \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\hat{B}_S(t)\hat{U}(t,t_0)\\ &= \hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{A}_S(t)\hat{U}(t,t_0)\hat{U}^\dagger(t,t_0)\hat{B}_S(t)\hat{U}(t,t_0)\\ \implies &\boxed{\hat{C}_H = \hat{A}_H\hat{B}_H}\end{aligned} \tag{18}$$

Representación de Heisenberg

- Conmutador

$$\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left(\hat{A}(t)\hat{B}(t)\right)_H - \left(\hat{B}(t)\hat{A}(t)\right)_H = \hat{A}_H(t)\hat{B}_H(t) - \hat{B}_H(t)\hat{A}_H(t)$$

Representación de Heisenberg

- Conmutador

$$\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left(\hat{A}(t)\hat{B}(t)\right)_H - \left(\hat{B}(t)\hat{A}(t)\right)_H = \hat{A}_H(t)\hat{B}_H(t) - \hat{B}_H(t)\hat{A}_H(t)$$

$$\implies \boxed{\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left[\hat{A}_H, \hat{B}_H\right]} \tag{19}$$

Representación de Heisenberg

- Conmutador

$$\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left(\hat{A}(t)\hat{B}(t)\right)_H - \left(\hat{B}(t)\hat{A}(t)\right)_H = \hat{A}_H(t)\hat{B}_H(t) - \hat{B}_H(t)\hat{A}_H(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left[\hat{A}_H, \hat{B}_H\right]} \tag{19}$$

Ejemplo:

$$\left[\hat{X}_S, \hat{P}_S\right]_H = \left[\hat{X}_H(t), \hat{P}_H(t)\right]$$
$$i\hbar = (i\hbar)_H = \left[\hat{X}_H(t), \hat{P}_H(t)\right], \forall t. \tag{20}$$

- Sea f una función analítica

- Conmutador

$$\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left(\hat{A}(t)\hat{B}(t)\right)_H - \left(\hat{B}(t)\hat{A}(t)\right)_H = \hat{A}_H(t)\hat{B}_H(t) - \hat{B}_H(t)\hat{A}_H(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left[\hat{A}_H, \hat{B}_H\right]} \tag{19}$$

Ejemplo:

$$\left[\hat{X}_S, \hat{P}_S\right]_H = \left[\hat{X}_H(t), \hat{P}_H(t)\right]$$

$$i\hbar = (i\hbar)_H = \left[\hat{X}_H(t), \hat{P}_H(t)\right], \forall t. \tag{20}$$

- Sea f una función analítica

$$\boxed{\left[f(\hat{A})\right]_H} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{A}^n\right]_H = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{A}_H^n \boxed{= f(\hat{A}_H)} \tag{21}$$

Representación de Heisenberg

- Conmutador

$$\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left(\hat{A}(t)\hat{B}(t)\right)_H - \left(\hat{B}(t)\hat{A}(t)\right)_H = \hat{A}_H(t)\hat{B}_H(t) - \hat{B}_H(t)\hat{A}_H(t)$$

$$\implies \boxed{\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left[\hat{A}_H, \hat{B}_H\right]} \tag{19}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \left[\hat{X}_S, \hat{P}_S\right]_H &= \left[\hat{X}_H(t), \hat{P}_H(t)\right] \\ i\hbar = (i\hbar)_H &= \left[\hat{X}_H(t), \hat{P}_H(t)\right], \forall t. \end{aligned} \tag{20}$$

- Sea f una función analítica

$$\boxed{\left[f(\hat{A})\right]_H} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{A}^n\right]_H = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{A}_H^n \boxed{= f(\hat{A}_H)} \tag{21}$$

- Si $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$ entonces $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$

Representación de Heisenberg

- Conmutador

$$\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left(\hat{A}(t)\hat{B}(t)\right)_H - \left(\hat{B}(t)\hat{A}(t)\right)_H = \hat{A}_H(t)\hat{B}_H(t) - \hat{B}_H(t)\hat{A}_H(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left[\hat{A}_S, \hat{B}_S\right]_H = \left[\hat{A}_H, \hat{B}_H\right]} \tag{19}$$

Ejemplo:

$$\left[\hat{X}_S, \hat{P}_S\right]_H = \left[\hat{X}_H(t), \hat{P}_H(t)\right]$$

$$i\hbar = (i\hbar)_H = \left[\hat{X}_H(t), \hat{P}_H(t)\right], \forall t. \tag{20}$$

- Sea f una función analítica

$$\boxed{\left[f(\hat{A})\right]_H} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{A}^n\right]_H = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{A}_H^n \boxed{= f(\hat{A}_H)} \tag{21}$$

- Si $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$ entonces $\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}$ entonces

$$\hat{H}_H(t) = e^{i\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{H}_S e^{-i\hat{H}_S(t-t_0)} = e^{i\hat{H}_S(t-t_0)}e^{-i\hat{H}_S(t-t_0)}\hat{H}_S = \hat{H}_S$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{H}_H(t) = \hat{H}_S} \tag{22}$$

Representación de Heisenberg

- Además si $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A} = 0$ y $\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = 0$

Representación de Heisenberg

- Además si $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A} = 0$ y $\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = 0$entonces

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right]\rangle + \langle \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H \rangle = 0$$

- Además si $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A} = 0$ y $\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = 0$entonces

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right]\rangle + \langle\left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \text{cte.}} \tag{23}$$

es decir que el observable $\hat{A}$ se conserva.

- Además si $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A} = 0$ y $\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = 0$entonces

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right]\rangle + \langle\left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \text{cte.}} \tag{23}$$

es decir que el observable $\hat{A}$ se conserva.
Ejemplos: Si $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$ entonces $\frac{\partial}{\partial t}\hat{H} = 0$ y $\left[\hat{H}, \hat{H}\right] = 0$

$$\Longrightarrow \langle \hat{H}(t)\rangle = E = \text{cte.}$$

tenemos la conservación de la energía.

- Además si $\frac{\partial}{\partial t}\hat{A} = 0$ y $\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = 0$entonces

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle \left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right]\rangle + \langle \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \text{cte.}} \tag{23}$$

es decir que el observable $\hat{A}$ se conserva.
Ejemplos: Si $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$ entonces $\frac{\partial}{\partial t}\hat{H} = 0$ y $\left[\hat{H}, \hat{H}\right] = 0$

$$\Longrightarrow \langle \hat{H}(t)\rangle = E = \text{cte.}$$

tenemos la conservación de la energía.
Si tenemos una partícula libre $\hat{H} = \hat{P}^2/2m \neq \hat{H}(t)$ entonces $\frac{\partial}{\partial t}\hat{H} = 0$ y $\left[\hat{P}, \hat{H}\right] = 0$

$$\Longrightarrow \langle \hat{P}(t)\rangle = p = \text{cte.}$$

tenemos la conservación del momento lineal.

Ejercicio 33

33 Demostrar que el valor de expectación de un observable $A(t)$ en el estado $|\psi(t)\rangle$ satisface

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle .$$

(a) Derivar el teorema de Ehrenfest a partir de este resultado.

Partimos de

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H$$

Ejercicio 33

33 Demostrar que el valor de expectación de un observable $A(t)$ en el estado $|\psi(t)\rangle$ satisface

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle .$$

(a) Derivar el teorema de Ehrenfest a partir de este resultado.

Partimos de

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H$$

Tomando valor medio de esto se deduce

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right]\rangle + \langle\left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H\rangle$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\langle \hat{A}(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{A}(t), \hat{H}(t)\right]\rangle + \langle\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(t)\rangle}. \qquad (24)$$

Ejercicio 33

$\boxed{33}$ Demostrar que el valor de expectación de un observable $A(t)$ en el estado $|\psi(t)\rangle$ satisface

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle .$$

(a) Derivar el teorema de Ehrenfest a partir de este resultado.

Partimos de

$$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right] + \left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H$$

Tomando valor medio de esto se deduce

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}_H(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{A}_H(t), \hat{H}_H(t)\right]\rangle + \langle\left[\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_S(t)\right]_H\rangle$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\langle \hat{A}(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{A}(t), \hat{H}(t)\right]\rangle + \langle\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(t)\rangle}. \qquad (24)$$

Tomando $\hat{H} = \hat{P}^2/2m + V(\hat{X})$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \hat{X}(t)\rangle &= \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{X},\hat{H}\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{X},V(\hat{X})\right]\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{X},\hat{P}^2/2m\right]\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{X},\hat{P}^2/2m\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar 2m}\langle \hat{P}\left[\hat{X},\hat{P}\right] + \left[\hat{X},\hat{P}\right]\hat{P}\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar 2m}2i\hbar\langle\hat{P}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{P}\rangle \Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\langle\hat{X}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{P}\rangle}\end{aligned} \qquad (25)$$

Ejercicio 33

Por otro lado

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{P}(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{P},\hat{H}\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{P},V(\hat{X})\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle V'(\hat{X})\left[\hat{P},\hat{X}\right]\rangle$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}i\hbar\langle V'(\hat{X})\rangle$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\langle\hat{P}\rangle = -\langle V'(\hat{X})\rangle} \tag{26}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \hat{P}(t)\rangle &= \frac{1}{i\hbar}\langle \left[\hat{P},\hat{H}\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle \left[\hat{P},V(\hat{X})\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle V'(\hat{X})\left[\hat{P},\hat{X}\right]\rangle \\
&= -\frac{1}{i\hbar} i\hbar \langle V'(\hat{X})\rangle \\
\Longrightarrow &\quad \boxed{\frac{d}{dt}\langle \hat{P}\rangle = -\langle V'(\hat{X})\rangle}
\end{aligned} \tag{26}$$

Esto implica que

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle \hat{X}\rangle = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\langle \hat{P}\rangle = -\frac{1}{m}\langle V'(\hat{X})\rangle. \tag{27}$$

Ejercicio 33

Por otro lado

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{P}(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle \left[\hat{P},\hat{H}\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle \left[\hat{P},V(\hat{X})\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle V'(\hat{X})\left[\hat{P},\hat{X}\right]\rangle$$
$$= -\frac{1}{i\hbar} i\hbar \langle V'(\hat{X})\rangle$$
$$\implies \boxed{\frac{d}{dt}\langle \hat{P}\rangle = -\langle V'(\hat{X})\rangle} \tag{26}$$

Esto implica que

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle \hat{X}\rangle = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\langle \hat{P}\rangle = -\frac{1}{m}\langle V'(\hat{X})\rangle. \tag{27}$$

Cuidado $\langle V'(\hat{X})\rangle \neq V'(\langle \hat{X}\rangle)$, por ejemplo $\langle \hat{X}^\alpha\rangle \neq \langle \hat{X}\rangle^\alpha$ a menos que $\alpha = 0, 1$.

Por otro lado

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{P}(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle \left[\hat{P},\hat{H}\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle \left[\hat{P},V(\hat{X})\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle V'(\hat{X})\left[\hat{P},\hat{X}\right]\rangle$$
$$= -\frac{1}{i\hbar}i\hbar\langle V'(\hat{X})\rangle$$
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\langle \hat{P}\rangle = -\langle V'(\hat{X})\rangle} \tag{26}$$

Esto implica que

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle \hat{X}\rangle = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\langle \hat{P}\rangle = -\frac{1}{m}\langle V'(\hat{X})\rangle. \tag{27}$$

Cuidado $\langle V'(\hat{X})\rangle \neq V'(\langle \hat{X}\rangle)$, por ejemplo $\langle \hat{X}^\alpha\rangle \neq \langle \hat{X}\rangle^\alpha$ a menos que $\alpha = 0, 1$.

Por eso, esta ecuación no es la segunda ley de newton para el valor medio ni se puede resolver por sí sola. Excepto para un potencial lineal o un oscilador armónico.

Ejercicio 33

(b) Utilizar esta fórmula para estudiar nuevamente la precesión del espín (ver ejercicio 4).

Ejercicio 33

(b) Utilizar esta fórmula para estudiar nuevamente la precesión del espín (ver ejercicio 4).

$$H = -\frac{\hbar}{2}\omega\sigma_z = -\omega S_z$$

Ejercicio 33

(b) Utilizar esta fórmula para estudiar nuevamente la precesión del espín (ver ejercicio 4).

$H = -\frac{\hbar}{2}\omega\sigma_z = -\omega S_z$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{S}_x\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{S}_x,\hat{H}\right]\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\omega\langle\left[\hat{S}_x,\hat{S}_z\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\omega i\hbar\langle S_y\rangle = \omega\langle S_y\rangle \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{S}_y\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{S}_y,\hat{H}\right]\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\omega\langle\left[\hat{S}_y,\hat{S}_z\right]\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\omega i\hbar\langle S_x\rangle = -\omega\langle S_x\rangle \tag{29}$$

$$\implies \frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{S}_x\rangle = \omega\frac{d}{dt}\langle S_y\rangle = -\omega^2\langle S_x\rangle$$

$$\implies \langle S_x\rangle(t) = \langle S_x\rangle(0)\cos\omega t + \langle S_y\rangle(0)\sin\omega t$$

$$\langle S_y\rangle(t) = \langle S_x\rangle(0)\sin\omega t - \langle S_y\rangle(0)\cos\omega t$$

(b) Utilizar esta fórmula para estudiar nuevamente la precesión del espín (ver ejercicio 4).

$H = -\frac{\hbar}{2}\omega\sigma_z = -\omega S_z$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{S}_x\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{S}_x,\hat{H}\right]\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\omega\langle\left[\hat{S}_x,\hat{S}_z\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\omega i\hbar\langle S_y\rangle = \omega\langle S_y\rangle \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{S}_y\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{S}_y,\hat{H}\right]\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\omega\langle\left[\hat{S}_y,\hat{S}_z\right]\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\omega i\hbar\langle S_x\rangle = -\omega\langle S_x\rangle \tag{29}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{S}_x\rangle = \omega\frac{d}{dt}\langle S_y\rangle = -\omega^2\langle S_x\rangle$$

$$\Longrightarrow \langle S_x\rangle(t) = \langle S_x\rangle(0)\cos\omega t + \langle S_y\rangle(0)\sin\omega t$$

$$\langle S_y\rangle(t) = \langle S_x\rangle(0)\sin\omega t - \langle S_y\rangle(0)\cos\omega t$$

si a $|\psi(0)\rangle = |S_x,+\rangle$ entonces

$$\boxed{\langle S_x\rangle(t) = \frac{\hbar}{2}\cos\omega t} \tag{30}$$

$$\boxed{\langle S_y\rangle(t) = \frac{\hbar}{2}\sin\omega t}. \tag{31}$$

Ejercicio 35

$\boxed{35}$ Considere una partícula en un potencial unidimensional $V(X) = -kX$ (por ejemplo, puede corresponder a un campo gravitatorio o a un campo eléctrico uniforme).

(a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y el momento P de la partícula. Integre las ecuaciones y compare con el resultado clásico.

Ejercicio 35

$\boxed{35}$ Considere una partícula en un potencial unidimensional $V(X) = -kX$ (por ejemplo, puede corresponder a un campo gravitatorio o a un campo eléctrico uniforme).

(a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y el momento P de la partícula. Integre las ecuaciones y compare con el resultado clásico.

Si $\hat{H} = \hat{P}^2/2m - k\hat{X}$

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{X} \rangle = \frac{1}{m}\langle \hat{P} \rangle \tag{32}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{P} \rangle = -\langle V'(\hat{X}) \rangle = k \tag{33}$$

Ejercicio 35

35 Considere una partícula en un potencial unidimensional $V(X) = -kX$ (por ejemplo, puede corresponder a un campo gravitatorio o a un campo eléctrico uniforme).

(a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y el momento P de la partícula. Integre las ecuaciones y compare con el resultado clásico.

Si $\hat{H} = \hat{P}^2/2m - k\hat{X}$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{X}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{P}\rangle \tag{32}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{P}\rangle = -\langle V'(\hat{X})\rangle = k \tag{33}$$

el momento crece linealmente con k

$$\boxed{\langle\hat{P}\rangle(t) = kt + \langle\hat{P}\rangle(0)} \tag{34}$$

35 Considere una partícula en un potencial unidimensional $V(X) = -kX$ (por ejemplo, puede corresponder a un campo gravitatorio o a un campo eléctrico uniforme).

(a) Escriba el teorema de Ehrenfest para los valores medios de la posición X y el momento P de la partícula. Integre las ecuaciones y compare con el resultado clásico.

Si $\hat{H} = \hat{P}^2/2m - k\hat{X}$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{X}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{P}\rangle \tag{32}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{P}\rangle = -\langle V'(\hat{X})\rangle = k \tag{33}$$

el momento crece linealmente con k

$$\boxed{\langle\hat{P}\rangle(t) = kt + \langle\hat{P}\rangle(0)} \tag{34}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{X}\rangle = \frac{kt}{m} + \langle\hat{P}\rangle(0) \implies \boxed{\langle\hat{X}\rangle(t) = \frac{k}{2m}t^2 + \frac{t}{m}\langle\hat{P}\rangle(0) + \langle\hat{X}\rangle(0)}, \tag{35}$$

obtenemos un movimiento uniformemente acelerado que coincide con el resultado clásico.

Ejercicio 35

(b) Muestre que la dispersión $\langle(\Delta P)^2\rangle$ no varía en el tiempo.

Ejercicio 35

(b) Muestre que la dispersión $\langle(\Delta P)^2\rangle$ no varía en el tiempo.

$$\frac{d}{dt}\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[(\Delta\hat{P})^2, \hat{H}\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[(\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle)^2, \hat{P}^2/2m - k\hat{X}\right]\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{P}^2 - 2\hat{P}\langle\hat{P}\rangle + \langle\hat{P}\rangle^2, -k\hat{X}\right]\rangle = \frac{-k}{i\hbar}\langle 2\hat{P}\left[\hat{P},\hat{X}\right] - 2\langle\hat{P}\rangle\left[\hat{P},\hat{X}\right]\rangle$$

$$= \frac{-k}{i\hbar}(-i\hbar)\left(2\langle\hat{P}\rangle - 2\langle\hat{P}\rangle\rangle\right) = 0 \tag{36}$$

$$\implies \boxed{\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle = \text{cte.}} \tag{37}$$

Ejercicio 35

(b) Muestre que la dispersión $\langle(\Delta P)^2\rangle$ no varía en el tiempo.

$$\frac{d}{dt}\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[(\Delta\hat{P})^2, \hat{H}\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[(\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle)^2, \hat{P}^2/2m - k\hat{X}\right]\rangle$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{P}^2 - 2\hat{P}\langle\hat{P}\rangle + \langle\hat{P}\rangle^2, -k\hat{X}\right]\rangle = \frac{-k}{i\hbar}\langle 2\hat{P}\left[\hat{P},\hat{X}\right] - 2\langle\hat{P}\rangle\left[\hat{P},\hat{X}\right]\rangle$$

$$= \frac{-k}{i\hbar}(-i\hbar)\left(2\langle\hat{P}\rangle - 2\langle\hat{P}\rangle\rangle\right) = 0 \tag{36}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle = \text{cte.}} \tag{37}$$

(c) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación de momentos. Deduzca luego una relación entre $\partial_t|\psi(p,t)|^2$ y $\partial_p|\psi(p,t)|^2$. Integre la ecuación e interprete.

Ejercicio 35

(b) Muestre que la dispersión $\langle(\Delta P)^2\rangle$ no varía en el tiempo.

$$\frac{d}{dt}\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[(\Delta\hat{P})^2, \hat{H}\right]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\left[(\hat{P}-\langle\hat{P}\rangle)^2, \hat{P}^2/2m - k\hat{X}\right]\rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\langle\left[\hat{P}^2 - 2\hat{P}\langle\hat{P}\rangle + \langle\hat{P}\rangle^2, -k\hat{X}\right]\rangle = \frac{-k}{i\hbar}\langle 2\hat{P}\left[\hat{P},\hat{X}\right] - 2\langle\hat{P}\rangle\left[\hat{P},\hat{X}\right]\rangle$$
$$= \frac{-k}{i\hbar}(-i\hbar)\left(2\langle\hat{P}\rangle - 2\langle\hat{P}\rangle\right) = 0 \tag{36}$$
$$\Longrightarrow \boxed{\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle = \text{cte.}} \tag{37}$$

(c) Escriba la ecuación de Schrödinger en la representación de momentos. Deduzca luego una relación entre $\partial_t|\psi(p,t)|^2$ y $\partial_p|\psi(p,t)|^2$. Integre la ecuación e interprete.

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar}H|\psi\rangle$$
$$\langle p|\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle p|(\hat{P}^2/2m - k\hat{X})|\psi\rangle$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}(p,t) = \frac{1}{i\hbar}p^2/2m\bar{\psi}(p,t) - k\frac{\partial}{\partial p}\bar{\psi}(p,t)$$
$$\bar{\psi}^*\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi} = \bar{\psi}^*\frac{1}{i\hbar}p^2/2m\bar{\psi} - \bar{\psi}^* k\frac{\partial}{\partial p}\bar{\psi}$$

Ejercicio 35

conjugando a ambos lados

$$\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}^* = -\bar{\psi}\frac{1}{i\hbar}p^2/2m\bar{\psi}^* - \bar{\psi}k\frac{\partial}{\partial p}\bar{\psi}^*$$

conjugando a ambos lados

$$\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}^* = -\bar{\psi}\frac{1}{i\hbar}p^2/2m\bar{\psi}^* - \bar{\psi}k\frac{\partial}{\partial p}\bar{\psi}^*$$

sumando

$$\bar{\psi}^*\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi} + \bar{\psi}\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}^* = -\bar{\psi}^*k\frac{\partial}{\partial p}\bar{\psi} - \bar{\psi}k\frac{\partial}{\partial p}\bar{\psi}^*$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\bar{\psi}|^2 = -k\frac{\partial}{\partial p}|\bar{\psi}|^2$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + k\frac{\partial}{\partial p}\right)|\bar{\psi}|^2 = 0 \implies \boxed{|\bar{\psi}|^2 = f(kt-p)},$$

con f alguna función real. La densidad de probabilidad en el espacio de momentos es una onda viajera que se mueve con velocidad k.