Clase 13

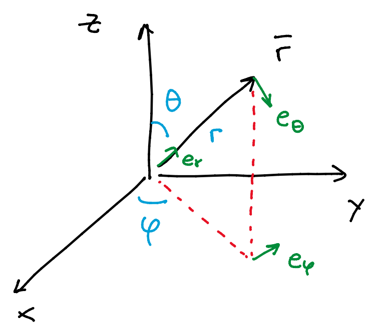
4. MOMENTO ANGULAR

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \end{cases} \quad \leftarrow \text{ ops. de momento angular orbital}$$

$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ (y todas las otras son nulas)

$\hat{\bar{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$

- $\hat{L}_i$ actúan sobre $\underset{\nearrow \text{ esfera de radio 1 } (\varphi, \theta)}{L^2(S^2)}$ sin importar la dependencia radial de funciones de $L^2(\mathbb{R}^3)$ (P4E57):



$$\hat{\bar{L}} = \hat{\bar{r}} \times \hat{\bar{p}} \longrightarrow \bar{r} \times (-i\hbar \bar{\nabla}) =$$

$$= -i\hbar\, r e_r \times \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$= -i\hbar \left(e_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin\theta} e_\theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

- Se puede probar que $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k$.

- Se cumple la identidad de Jacobi:

$$[\hat{L}_x, \underbrace{[\hat{L}_y, \hat{L}_z]}_{\propto \hat{L}_x}] + [\hat{L}_y, \underbrace{[\hat{L}_z, \hat{L}_x]}_{\propto \hat{L}_y}] + [\hat{L}_z, \underbrace{[\hat{L}_x, \hat{L}_y]}_{\propto \hat{L}_z}] = 0$$

Esto (junto a otras cosas) implica que los operadores de momento angular están en un álgebra de Lie muy particular.

4.1. Álgebra su(2)

4.1. Álgebra su(2)

Álgebra de Lie: álgebra con $[\,,\,] : A \times A \to A$

- bilineal
- antisimétrica $[a,b] = -[b,a]$
- Id. Jacobi
- $[a,a] = 0$

Consideramos un álgebra de operadores, que para cierta base $\{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}$ (hermíticos) tiene un corchete de Lie (conmutador) que toma la forma:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{J}_k \qquad \left(\begin{matrix} i = 1,2,3 \\ x, y\, z \end{matrix}\right)$$

Este álgebra se conoce como <u>álgebra su(2)</u>.

Vamos a estudiar este álgebra de operadores.

P4E52) Definimos los operadores de subida y bajada:

$$\hat{J}_\pm \equiv \hat{J}_x \pm i\,\hat{J}_y \,, \qquad \begin{aligned} \hat{J}_x &= \tfrac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-) \\ \hat{J}_y &= \tfrac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-) \end{aligned}$$

Vean que:
$$\left.\begin{aligned} [\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] &= \pm \hat{J}_\pm \\ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= 2 J_z \end{aligned}\right\} \text{ejercicio}$$

a) Veamos que $\hat{J}^2 \equiv \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ es un Casimir su(2) (conmuta con todo elemento de su(2)). Veamos que conmuta con los elementos de la base $(\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$:

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_x] = [\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \hat{J}_x] =$$

$$= [\hat{J}_y^2, \hat{J}_x] + [\hat{J}_z^2, \hat{J}_x] =$$

Cuidado con usar que $[f(\hat{A}), \hat{B}] = f'(\hat{A})[\hat{A}, \hat{B}]$ que vale sólo si $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$.

$$= [\hat{J}_y^2, \hat{J}_x] + [\hat{J}_z^2, \hat{J}_x] =$$

$[f(\hat{A}), \hat{B}] = f'(\hat{A})[\hat{A}, \hat{B}]$ que vale sólo si $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0$.

$$= \hat{J}_y \underbrace{[\hat{J}_y, \hat{J}_x]}_{-i\hat{J}_z} + \underbrace{[\hat{J}_y, \hat{J}_x]}_{-i\hat{J}_z}\hat{J}_y + \hat{J}_z \underbrace{[\hat{J}_z, \hat{J}_x]}_{i\hat{J}_y} + \underbrace{[\hat{J}_z, \hat{J}_x]}_{i\hat{J}_y}\hat{J}_z =$$

$$= 0.$$

$\therefore \quad [\hat{J}^2, \hat{J}_i] = 0.$

$\therefore$ Existe base común de autovectores a $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_i$.

OJO: la base común de autovectores a $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_x$ no es la misma que la común a $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_y$ (etc.) porque $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] \neq 0$.

b) Llamamos $\{|\beta, m\rangle\}$ a la base común de autovectores de $\hat{J}^2$ y $\hat{J}_z$.

$$\hat{J}^2 |\beta, m\rangle = \beta |\beta, m\rangle$$

$$\hat{J}_z |\beta, m\rangle = m |\beta, m\rangle$$

(m, β son reales porque $\hat{J}_i$ son hermíticos)

Queremos ver que $\beta = j(j+1)$ con $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ y m varía en saltos de una unidad y $-j \leq m \leq j$.

$$\underbrace{\langle \beta, m | \hat{J}^2 | \beta, m\rangle}_{\beta} = \underbrace{\langle \beta, m | \hat{J}_x^2 | \beta, m\rangle}_{\underbrace{\| \hat{J}_x |\beta, m\rangle \|^2}_{\geq 0}} + \underbrace{\langle \beta, m | \hat{J}_y^2 | \beta, m\rangle}_{\underbrace{\| \hat{J}_y |\beta, m\rangle \|^2}_{\geq 0}} + \underbrace{\langle \beta, m | \hat{J}_z^2 | \beta, m\rangle}_{m^2}$$

$\therefore \quad \beta \geq m^2 \geq 0$

$\therefore$ Para β fijo m se encuentra acotado.

Calculemos: $\hat{J}_z \hat{J}_+ |\beta, m\rangle = (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \underbrace{[\hat{J}_z, \hat{J}_+]}_{\hat{J}_+ \text{ (ejercicio)}}) |\beta, m\rangle =$

$$= m \hat{J}_+ |\beta, m\rangle + \hat{J}_+ |\beta, m\rangle =$$

$$= (m+1) \hat{J}_+ |\beta, m\rangle$$

$\therefore$ Si $\hat{J}_+ |\beta, m\rangle \neq 0$, entonces es autovector de $\hat{J}_z$ con autovalor $(m+1)$.

Fijando β hay un valor máximo para m, que llamamos j.

Para ese valor: $\hat{J}_+ |\beta, j\rangle = 0$. (si no fuera cero, $\hat{J}_+ |\beta, j\rangle$ sería autovector de $\hat{J}_z$ con autovalor $j+1$ y esto contradice que j es el máximo valor de m)

Veamos qué relación hay entre β y j:

$\hat{J}_+ |\beta, j\rangle = 0 \Rightarrow \hat{J}_- (\hat{J}_+ |\beta, j\rangle) = 0$

autovector de $\hat{J}_z$ (no puede ser 0)

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ |\beta, j\rangle = (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hat{J}_z) |\beta, j\rangle = (\beta - j^2 - j) |\beta, j\rangle = 0$$

$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hat{J}_z$ (demostrar!)

$\therefore \quad \beta = j(j+1)$.

Lo mismo que hicimos con $\hat{J}_+$ lo podemos hacer con $\hat{J}_-$:

$* \quad \hat{J}_z \hat{J}_- |\beta, m\rangle = \ldots = (m-1) \hat{J}_- |\beta, m\rangle$

* Si llamamos K al valor mínimo de m : $\hat{J}_-|\beta, K\rangle = 0$.

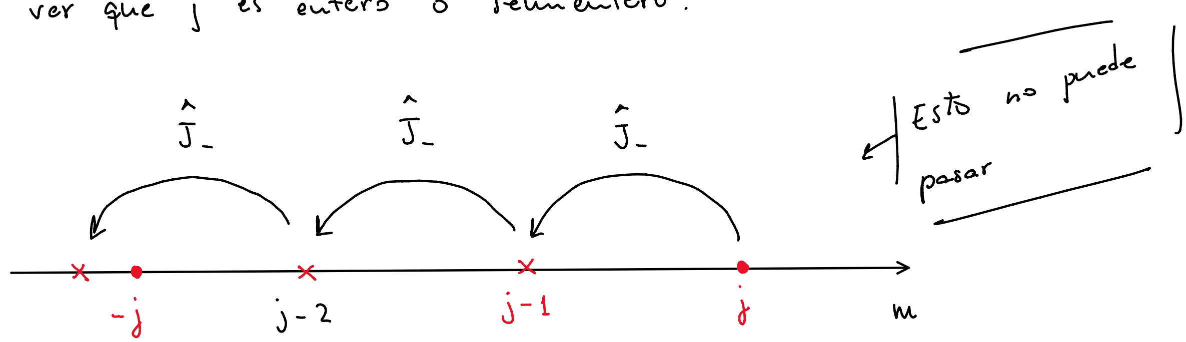
* Podemos probar que $0 = \hat{J}_+\hat{J}_-|\beta,K\rangle = \dots = (\beta - K^2 + K)|\beta,K\rangle$ y entonces $\beta = K(K-1)$.

Entonces: $\underbrace{j(j+1)}_{\beta} = \underbrace{K(K-1)}_{\beta} \Rightarrow K = -j$

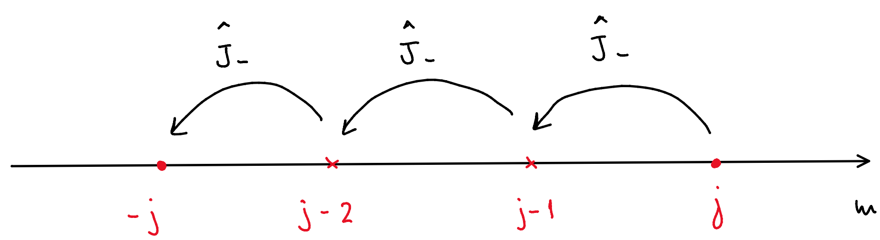
(descartar la solución $K = j+1 > m_{max} = j$)

$\therefore\ -j \leq m \leq j$

Sólo resta ver que j es entero o semientero:



Lo que tiene que pasar es lo siguiente:



$\therefore\ j - (-j) = 2j \in \mathbb{N}_0$

$\therefore\ j$ es semientero o entero (≥ 0).

$\therefore$ Valores permitidos para j y m:

- $j = 0$, $\quad m = 0$.
- $j = \frac{1}{2}$, $\quad m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.
- $j = 1$, $\quad m = 1, 0, -1$.
- $j = \frac{3}{2}$, $\quad m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.

$\vdots$

Para cada valor fijo de j hay $(2j+1)$ valores posibles de m.

Normalización: $\quad \hat{J}_+ |j, m\rangle = c_{jm} |j, m+1\rangle$

↳ buscamos esta c_{jm} para que resulte $\| |j, m+1\rangle \| = 1$ si $\| |j, m\rangle \| = 1$.

$$\| \hat{J}_+ |j, m\rangle \|^2 = |c_{jm}|^2$$

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hat{J}_z$$

$$\langle j, m | \underbrace{\hat{J}_+^\dagger}_{\hat{J}_-} \hat{J}_+ | j, m\rangle = \langle j, m | \hat{J}_- \hat{J}_+ | j, m\rangle = \ldots = j(j+1) - m(m+1)$$

$$\therefore \quad |c_{jm}| = j(j+1) - m(m+1)$$

$$\therefore \quad \hat{J}_+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, |j, m+1\rangle$$

(sirve para P4E53)

$$\hat{J}_- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, |j, m-1\rangle$$

4.2. Momento angular orbital

Autovalores del momento angular orbital

Vimos que las componentes de $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$ cumplen el álgebra de $su(2)$.

Entonces, $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ son simultáneamente diagonalizables:

$$\hat{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$$

$$\hat{L}_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$$

En principio, l es entero o semientero $\geqslant 0$ y $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$. Veamos que la forma explícita de $\hat{\vec{L}}$ impone una restricción adicional sobre los autovalores de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$.

P4E55) Veamos que $\hat{L}_z$ tiene autovalores $m\hbar$ con $m \in \mathbb{Z}$.

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$$

$$\hat{q}_1 \equiv \frac{\hat{x} + \hat{p}_y}{\sqrt{2}}, \quad \hat{q}_2 \equiv \frac{\hat{x} - \hat{p}_y}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_1 \equiv \frac{\hat{p}_x - \hat{y}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_2 \equiv \frac{\hat{p}_x + \hat{y}}{\sqrt{2}}$$

$$[\hat{q}_1, \hat{q}_2] = 0, \quad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = 0, \quad [\hat{q}_1, \hat{p}_2] = 0, \quad [\hat{q}_2, \hat{p}_1] = 0$$

$$[\hat{q}_1, \hat{p}_1] = i\hbar$$

$$[\hat{q}_2, \hat{p}_2] = i\hbar$$

$$\hat{x} = \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{\sqrt{2}}, \quad \hat{y} = \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_x = \frac{\hat{p}_1 + \hat{p}_2}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_y = \frac{\hat{q}_1 - \hat{q}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{L}_z = \frac{1}{2}(\hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2) - \frac{1}{2}(\hat{p}_2^2 - \hat{p}_1^2) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\hat{p}_1^2 + \frac{1}{2}\hat{q}_1^2\right)}_{\hat{H}_1} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\hat{p}_2^2 + \frac{1}{2}\hat{q}_2^2\right)}_{\hat{H}_2}$$

$\hat{H}_1$ y $\hat{H}_2$ son Hamiltonianos de osc. arm. de $m_1 = m_2 = 1$ y $\omega_1 = \omega_2 = 1$.

$\in \mathbb{N}_0$ $\quad$ $\in \mathbb{N}_0$

$\therefore$ Autovalores de $\hat{L}_z = \hbar\left(\overset{\in \mathbb{N}_0}{n_1} + \frac{1}{2}\right) - \hbar\left(\overset{\in \mathbb{N}_0}{n_2} + \frac{1}{2}\right) = \hbar(\underbrace{n_1 - n_2}_{\in \mathbb{Z}})$

$\therefore$ Autovalores de $\hat{L}_z = m\hbar$ con $m \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ $l = 0, 1, 2, \dots$ (l debe ser entero).

ALGUNAS COSAS IMPORTANTES DE LA CLASE

- Álgebra su(2): $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$
- $\hat{J}^2$ y alguno de los $\hat{J}_i$ son diagonalizables simultáneamente:

  $\hat{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle$, $\quad \hat{J}_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle$

  Valores posibles: $\quad j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

  $\qquad\qquad\qquad\qquad m = j, j-1, j-2, \dots, -j$
- $\hat{J}_\pm|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j, m\pm 1\rangle$
- Recordar que $\hat{\vec{L}} \equiv \hbar\hat{\vec{J}}$, donde los j sólo toman valores enteros: $\quad \hat{L}^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle$, $\quad \hat{L}_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$

  $\hat{L}_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,|l, m\pm 1\rangle$