Clase 15

Momento angular orbital y rotaciones

$$\hat{R}_z(\Delta\varphi) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}(\Delta\varphi)\hat{L}_z}$$

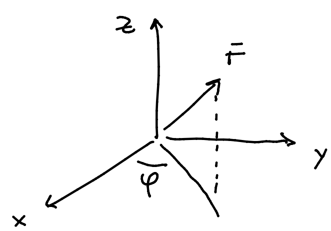
$$\hat{R}_z(\Delta\varphi)\,\Psi(\bar{r}) = \quad ? \qquad\qquad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\hat{R}_z(\Delta\varphi) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta\varphi\,\hat{L}_z\right) \overset{\uparrow}{=} e^{-\Delta\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}}$$

$$\hat{R}_z(\Delta\varphi)\,\Psi(r,\varphi,\theta) = e^{-\Delta\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}}\,\Psi(r,\varphi,\theta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\Delta\varphi)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\varphi^k}\varphi(r,\varphi,\theta) =$$

$$= \Psi(r,\varphi-\Delta\varphi,\theta)$$



$$\therefore \quad \hat{R}_z(\Delta\varphi)\,\Psi(r,\varphi,\theta) = \Psi(r,\varphi-\Delta\varphi,\theta)$$

$$\therefore \quad \hat{R}_z(\Delta\varphi)\,\Psi(\bar{r}) = \Psi\left(R_z(\Delta\varphi)^{-1}\,\bar{r}\right)$$

En general: $\hat{R}_{\bar{n}}(\alpha) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{\bar{L}}\cdot\bar{n}}$ implementa rotaciones del estado alrededor del versor $\bar{n}$ en un ángulo α.

<u>Ej.:</u> vean por ejemplo que $\hat{R}_z(\pi/2).|1,1_x\rangle = |1,1_y\rangle$.

4.3. Espín

$$[\hat{J}_i,\hat{J}_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k \quad \leftarrow \text{álgebra } su(2)$$

$$j = 0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},2,\dots$$

Forzamos la idea de que $\hat{R}_n(\alpha) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{\bar{J}}\cdot\bar{n}}$ implemente rotaciones.

Forzamos la idea de que $\hat{R}_n(\alpha) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \hat{\bar{J}}\cdot\bar{n}}$ implemente rotaciones.

*) Si el estado de mi sistema es una función escalar $\psi(\bar{r})$:

$$\hat{R}_n(\alpha)\psi(\bar{r}) = \psi(R_n(\alpha)^{-1}\bar{r}) \Rightarrow \bar{J} = -i\hbar\bar{r}\times\bar{\nabla} = \hat{\bar{r}}\times\hat{\bar{p}} = \hat{\bar{L}}$$

Impongo que

*) Si el estado de mi sistema es $\bar{\Psi}(\bar{r}) = \begin{pmatrix}\psi_1(\bar{r})\\ \psi_2(\bar{r})\\ \vdots\end{pmatrix}$:

$$\hat{R}_n(\alpha)\begin{pmatrix}\psi_1(\bar{r})\\ \psi_2(\bar{r})\\ \vdots\end{pmatrix} = D_n(\alpha)\begin{pmatrix}\psi_1(R_n(\alpha)^{-1}\bar{r})\\ \psi_2(R_n(\alpha)^{-1}\bar{r})\\ \vdots\end{pmatrix}$$ (análogo a la rotación del campo eléctrico)

matriz que mezcla las componentes

$$\hat{R}_n(\alpha) = \hat{D}_n(\alpha)\cdot \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{\bar{L}}\cdot\bar{n}}}_{\text{unitario}} \Rightarrow \hat{D}_n(\alpha) \text{ es unitario}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{\bar{J}}\cdot\bar{n}}}_{\text{unitario}}$$

op. hermítico

$$\hat{D}_n(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{\bar{S}}\cdot\bar{n}}$$

$\hat{D}_n(\alpha)$ y $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\bar{L}}\cdot\bar{n}}$ conmutan (por definición - actúan sobre espacios distintos: $\mathbb{C}^m$ y $L^2(\mathbb{R}^3)$ respectivamente).

$$\hat{D}_n(\alpha) \to \hat{\mathbb{1}}_{orb.} \otimes \hat{D}_n(\alpha)$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\bar{L}}\cdot\bar{n}} \to e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\bar{L}}\cdot\bar{n}} \otimes \hat{\mathbb{1}}_{\mathbb{C}^m}$$

Como $\hat{D}_n(\alpha)$ y $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\bar{L}}\cdot\bar{n}}$ conmutan: $e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{\bar{J}}\cdot\bar{n}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha(\hat{\bar{L}}+\hat{\bar{S}})\cdot\bar{n}}$

$$\therefore \hat{\bar{J}} = \hat{\bar{L}} + \hat{\bar{S}} \qquad \left(\hat{J}_i = \hat{L}_i \otimes \hat{\mathbb{1}}_{\mathbb{C}^m} + \hat{\mathbb{1}}_{orb.}\otimes\hat{S}_i\right)$$

¿Qué características tiene $\hat{\bar{S}}$?

Como $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$ y $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k$ resulta:

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k$$

$$\therefore \boxed{\bar{S} \text{ es un momento angular}}$$

$\hat{\bar{S}}^2 |s,m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s,m\rangle$ $\qquad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

$\hat{S}_z |s,m\rangle = \hbar m |s,m\rangle$ $\qquad -s \leq m \leq s$

(en saltos de una unidad)

$\hat{\bar{S}} \leftarrow$ OP. DE ESPÍN (momento angular intrínseco)

- Espín 1/2

$s = \frac{1}{2} \rightarrow m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \longrightarrow$ esp. de Hilbert: $\mathbb{C}^2$

$\hat{\bar{S}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\bar{\sigma}}$, $\hat{\bar{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z) \longrightarrow \begin{cases} \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$ matrices de Pauli

$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Estado de espín: $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ $\qquad (|a|^2 + |b|^2 = 1)$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\hat{S}_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$

$\hat{S}^2 |\pm\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\pm\rangle$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad \hat{S}^2 |\pm\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |\pm\rangle$

espinor

En general, el estado de una partícula de espín 1/2 tendrá parte espacial:

$$\bar{\Psi}(\bar{r}) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\bar{r}) \\ \Psi_2(\bar{r}) \end{pmatrix} = \Psi_1(\bar{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi_2(\bar{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\Psi_1(\bar{r})\,|+\rangle + \Psi_2(\bar{r})\,|-\rangle$$

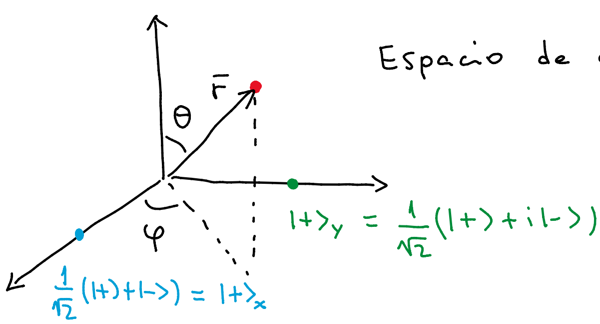
$$|||$$

$$|\Psi_1\rangle \otimes |+\rangle + |\Psi_2\rangle \otimes |-\rangle$$

Esfera de Bloch:

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle$$

$\leftarrow$ estado más general de espín 1/2 $\downarrow$ $\boxed{\text{puro}}$



Espacio de estados: esfera de radio 1

$\downarrow$

ESFERA DE BLOCH

$(|\bar{r}| = 1)$

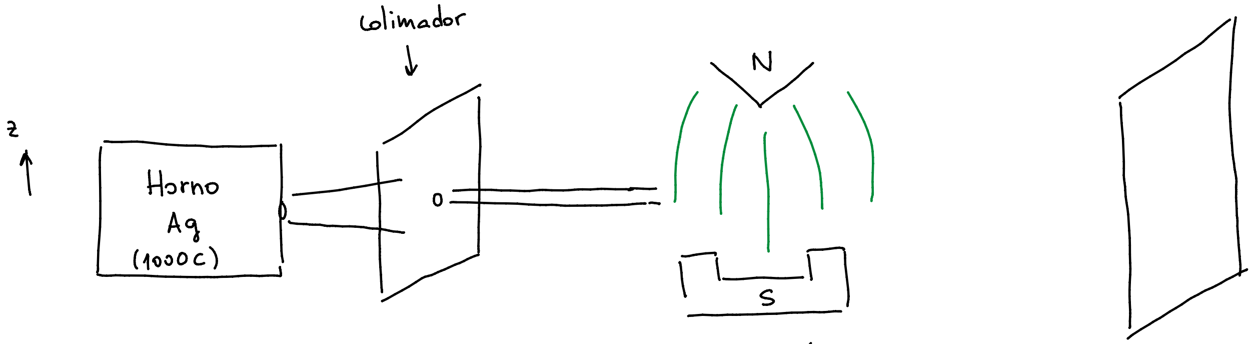
(BOLA DE BLOCH: $|\bar{r}| \leq 1$)

↳ representan los estados más generales de espín 1/2

$e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \hat{\bar{S}}\cdot\bar{n}}$: implementa rotaciones de los estados en la esfera de Bloch

Por ejemplo: $|+\rangle_x$ y $|+\rangle_y$ están conectados por una rotación alrededor de $\bar{n} = e_z$ en ángulo $\pi/2$.

Experimento de Stern-Gerlach (1921/1922)



Campo magnético no homogéneo
(muy intenso en z)

pantalla

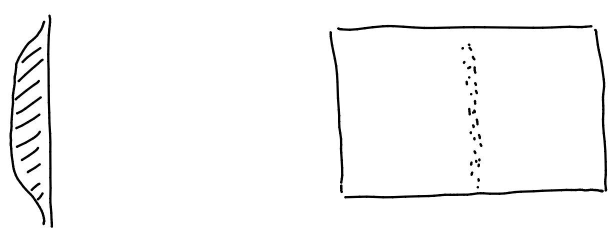
Clásicamente: $\bar{F} = -\bar{\nabla}(\bar{\mu} \cdot \bar{B}) \longrightarrow F_z \approx \mu_z \dfrac{\partial B_z}{\partial z}$ (ignoramos B_x, B_y frente a B_z)

momento magnético del átomo de Ag

$\bar{\mu} \propto \bar{J}$

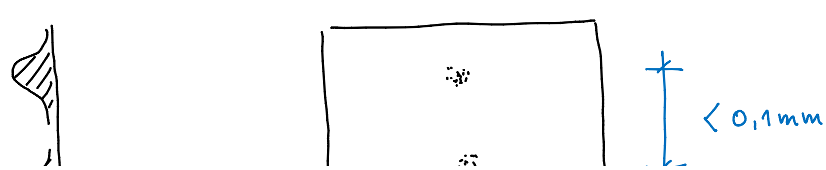
momento angular

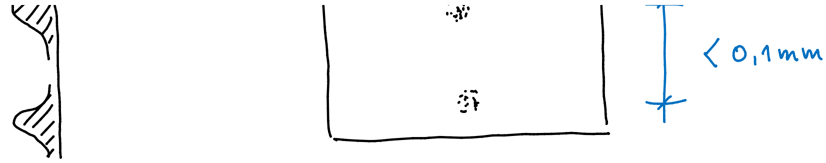
En principio, $\bar{\mu}$ orientados aleatoriamente



esto es lo que clásicamente esperaría ver sobre la pantalla

Sin embargo, al hacer el experimento se observa lo siguiente:





¿Cómo entendemos el resultado del experimento?

Ag $\rightarrow$ 47 e^-, 1 de ellos en el nivel $5s$ (n, $l=0$)

46 restantes suman $\bar{J}_T = \bar{0}$

$$\therefore \quad \bar{J}_{Ag} = \bar{J}_{e^- \text{ en } 5s} = \bar{S}_{5s}$$

mom. ang. del átomo $\qquad$ espín del e^- en el nivel $5s$

$$\bar{\mu} \propto \bar{J} = \bar{S} \qquad (s = 1/2)$$

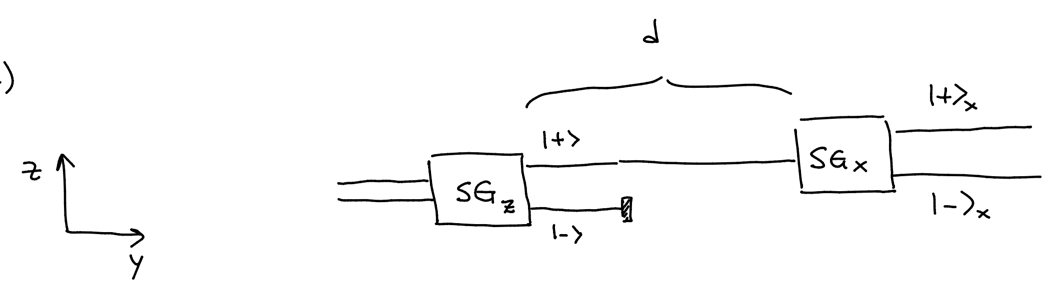
$$\bar{F} = -\bar{\nabla}(\bar{\mu} \cdot \bar{B}) \propto -S_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{e}_z$$

sabemos que $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$

$\therefore$ Medición de la deflexión $\rightarrow$ Medición indirecta de $\hat{S}_z$

Ejercicio (P4E64):

a)



$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \quad \Big\} \rightarrow \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x)$$

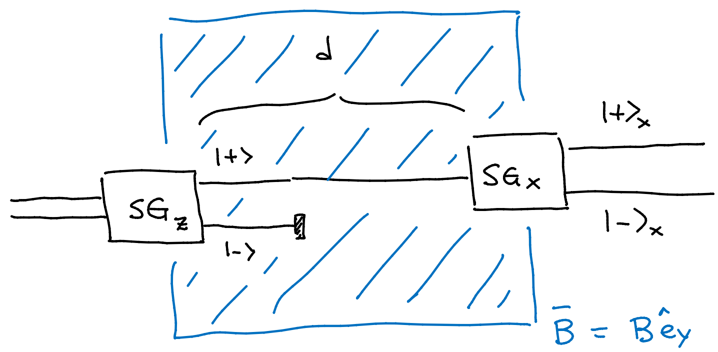
$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \quad \longrightarrow \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x)$$

$$P\left(S_x = \frac{\hbar}{2}\right) = \left|\langle +|_x |+\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P\left(S_x = -\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\langle -|_x |+\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

b)



$$\hat{H} = -\frac{2\mu}{\hbar} B \hat{S}_y$$

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle$$

$$\underbrace{|\psi(T)\rangle}_{T = \frac{d}{v}} = e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}} |\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_0 \hat{S}_y} |+\rangle = \ , \quad \theta_0 \equiv -\frac{2\mu B T}{\hbar}$$

Probar!

$$= \hat{R}_y(\theta_0)|+\rangle = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)|-\rangle$$

$$P\left(S_x = \frac{\hbar}{2}\right)(T) = \left|\langle +|_x |\psi(T)\rangle\right|^2 = \left|\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle +| + \langle -|)\right]\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)|-\rangle\right]\right|^2 =$$

$$= \ldots = \frac{1}{2}\left[1 - \sin\left(\frac{2\mu B d}{\hbar v}\right)\right].$$