# Física Teórica 2 - Práctica

Suma de momento angular.

# Suma de momento angular

<u>Temas a ver:</u>

1. Motivación y repaso teórico.

Temas a ver:

1. Motivación y repaso teórico.
2. Problema 65

# Suma de momento angular

Temas a ver:

1. Motivación y repaso teórico.
2. Problema 65
3. Problema 66

# Suma de momento angular

Temas a ver:

1. Motivación y repaso teórico.
2. Problema 65
3. Problema 66

# Suma de momento angular

¿En qué casos nos interesa estudiar el momento angular total?

- Sistemas compuestos

-Sistemas con varias grados de libertad

¿Por qué nos interesa? Porque se conserva el momento total pero no los parciales.

## Suma de momento angular

¿En qué casos nos interesa estudiar el momento angular total?

- Sistemas compuestos

-Sistemas con varias grados de libertad

¿Por qué nos interesa? Porque se conserva el momento total pero no los parciales.

**Ejemplo:**

Dos partículas sometidas a un potencial central $V$

$$H_0 = H_1 + H_2 \tag{1}$$

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2 + V(\mathrm{r}_1) \tag{2}$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2 + V(\mathrm{r}_2) \tag{3}$$

# Suma de momento angular

¿En qué casos nos interesa estudiar el momento angular total?

- Sistemas compuestos

-Sistemas con varias grados de libertad

¿Por qué nos interesa? Porque se conserva el momento total pero no los parciales.

**Ejemplo:**

Dos partículas sometidas a un potencial central $V$

$$H_0 = H_1 + H_2 \tag{1}$$

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2 + V(\mathrm{r}_1) \tag{2}$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2 + V(\mathrm{r}_2) \tag{3}$$

Si las partículas no interactúan entonces

$$[\mathrm{L}_1, H_1] = [\mathrm{L}_2, H_2] = 0 \tag{4}$$

$$\implies [\mathrm{L}_1, H_0] = [\mathrm{L}_2, H_0] \tag{5}$$

y los momentos angulares de cada partícula se conservan por separado.

# Suma de momento angular

Pero si las partículas interactúan con un potencial $v$ siendo el hamiltoniano total

$$H = H_0 + v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|), \tag{6}$$

Pero si las partículas interactúan con un potencial $v$ siendo el hamiltoniano total

$$H = H_0 + v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|), \tag{6}$$

entonces

$$[\mathrm{L}_1, H] = [\mathrm{L}_1, v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)] \tag{7}$$

$$[L_{1z}, H] = [L_{1z}, v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)] = [\mathrm{L}_1, v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)] = \frac{\hbar}{i}\left(x_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) \neq 0 \tag{8}$$

Pero si las partículas interactúan con un potencial $v$ siendo el hamiltoniano total

$$H = H_0 + v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|), \tag{6}$$

entonces

$$[\mathrm{L}_1, H] = [\mathrm{L}_1, v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)] \tag{7}$$

$$[L_{1z}, H] = [L_{1z}, v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)] = [\mathrm{L}_1, v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)] = \frac{\hbar}{i}\left(x_1\frac{\partial v}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) \neq 0 \tag{8}$$

En cambio, si consideramos

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \tag{9}$$

Pero si las partículas interactúan con un potencial $v$ siendo el hamiltoniano total

$$H = H_0 + v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|), \tag{6}$$

entonces

$$[\mathrm{L}_1, H] = [\mathrm{L}_1, v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)] \tag{7}$$

$$[L_{1z}, H] = [L_{1z}, v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)] = [\mathrm{L}_1, v(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)] = \frac{\hbar}{i}\left(x_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) \neq 0 \tag{8}$$

En cambio, si consideramos

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \tag{9}$$

tenemos

$$[L_z, H] = [L_{1z} + L_{2z}, H] = \frac{\hbar}{i}\left(x_1 \frac{\partial v}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial v}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial v}{\partial x_2}\right) \tag{10}$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{v'}{|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|} \left(x_1(y_1 - y_2) - y_1(x_1 - x_2) + x_2(y_2 - y_1) - y_2(x_2 - x_1)\right) \tag{11}$$

$$\Longrightarrow [L_z, H] = 0 \tag{12}$$

# Suma de momento angular

Un ejemplo de un caso con varios grados de libertad es átomo de hidrógeno. Además de lo que vimos cuando se agregan correcciones relativistas aparece un término de acoplamiento spin-orbita de la forma

$$H_{SO} = g(r)\mathsf{L} \cdot \mathsf{S}. \tag{13}$$

Un ejemplo de un caso con varios grados de libertad es átomo de hidrógeno. Además de lo que vimos cuando se agregan correcciones relativistas aparece un término de acoplamiento spin-orbita de la forma

$$H_{SO} = g(r)\mathsf{L} \cdot \mathsf{S}. \tag{13}$$

En consecuencia el momento angular orbital y el spin no se conservan por separado ya que

$$[L_z, H_{SO}] = g(r)[L_z, L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z] \tag{14}$$

$$= g(r)i\hbar\,(L_y S_x - L_x S_y) \neq 0 \tag{15}$$

# Suma de momento angular

Un ejemplo de un caso con varios grados de libertad es átomo de hidrógeno. Además de lo que vimos cuando se agregan correcciones relativistas aparece un término de acoplamiento spin-orbita de la forma

$$H_{SO} = g(r)\mathsf{L} \cdot \mathsf{S}. \tag{13}$$

En consecuencia el momento angular orbital y el spin no se conservan por separado ya que

$$\begin{aligned} [L_z, H_{SO}] &= g(r)[L_z, L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z] && (14) \\ &= g(r) i\hbar \left( L_y S_x - L_x S_y \right) \neq 0 && (15) \end{aligned}$$

y de la misma forma

$$[S_z, H_{SO}] = g(r) i\hbar \left( L_x S_y - L_y S_x \right) \neq 0. \tag{16}$$

Un ejemplo de un caso con varios grados de libertad es átomo de hidrógeno. Además de lo que vimos cuando se agregan correcciones relativistas aparece un término de acoplamiento spin-orbita de la forma

$$H_{SO} = g(r)\mathsf{L} \cdot \mathsf{S}. \tag{13}$$

En consecuencia el momento angular orbital y el spin no se conservan por separado ya que

$$[L_z, H_{SO}] = g(r)[L_z, L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z] \tag{14}$$
$$= g(r) i\hbar \left(L_y S_x - L_x S_y\right) \neq 0 \tag{15}$$

y de la misma forma

$$[S_z, H_{SO}] = g(r) i\hbar \left(L_x S_y - L_y S_x\right) \neq 0. \tag{16}$$

Pero si definimos el momento angular total

$$\mathsf{J} = \mathsf{L} + \mathsf{S} \tag{17}$$

## Suma de momento angular

Un ejemplo de un caso con varios grados de libertad es átomo de hidrógeno. Además de lo que vimos cuando se agregan correcciones relativistas aparece un término de acoplamiento spin-orbita de la forma

$$H_{SO} = g(r)\mathsf{L} \cdot \mathsf{S}. \tag{13}$$

En consecuencia el momento angular orbital y el spin no se conservan por separado ya que

$$[L_z, H_{SO}] = g(r)[L_z, L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z] \tag{14}$$
$$= g(r) i\hbar \left(L_y S_x - L_x S_y\right) \neq 0 \tag{15}$$

y de la misma forma

$$[S_z, H_{SO}] = g(r) i\hbar \left(L_x S_y - L_y S_x\right) \neq 0. \tag{16}$$

Pero si definimos el momento angular total

$$\mathsf{J} = \mathsf{L} + \mathsf{S} \tag{17}$$

tenemos

$$[J_z, H_{SO}] = [L_z + S_z, H_{SO}] = 0. \tag{18}$$

### Espacio de estados

Tenemos dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_1$ correspondientes a estados de momento angular con bases $\{|j_1, m_1\rangle\}_{j_1,m_1}$ y $\{|j_2, m_2\rangle\}_{j_2,m_2}$ respectivamente, tales que

$$J_i^2|j_i, m_i\rangle = j_i(j_i + 1)\hbar^2|j_i, m_i\rangle \tag{19}$$

$$J_{iz}|j_i, m_i\rangle = m_i\hbar|j_i, m_i\rangle \tag{20}$$

$$J_{i\pm}|j_i, m_i\rangle = \hbar\sqrt{j_i(j_i + 1) - m_i(m_i \pm 1)}|j_i, m_i \pm 1\rangle \tag{21}$$

con $i = 1, 2$.

**Espacio de estados**

Tenemos dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_1$ correspondientes a estados de momento angular con bases $\{|j_1, m_1\rangle\}_{j_1,m_1}$ y $\{|j_2, m_2\rangle\}_{j_2,m_2}$ respectivamente, tales que

$$J_i^2|j_i, m_i\rangle = j_i(j_i + 1)\hbar^2|j_i, m_i\rangle \tag{19}$$

$$J_{iz}|j_i, m_i\rangle = m_i\hbar|j_i, m_i\rangle \tag{20}$$

$$J_{i\pm}|j_i, m_i\rangle = \hbar\sqrt{j_i(j_i + 1) - m_i(m_i \pm 1)}|j_i, m_i \pm 1\rangle \tag{21}$$

con $i = 1, 2$.

El espacio de Hilbert global $\mathcal{H}$ viene dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \tag{22}$$

y una base de esta espacio es

$$|j_1, j_2, m_1 m_2\rangle := |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle. \tag{23}$$

# Suma de momento angular

También tenemos los operadores producto como por ejemplo

$$J_1^2|j_1, j_2, m_1 m_2\rangle := (J_1^2 \otimes \mathrm{Id})|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \tag{24}$$

$$= J_1^2|j_1, m_1\rangle \otimes \mathrm{Id}|j_2, m_2\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \tag{25}$$

$$= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, j_2, m_1 m_2\rangle. \tag{26}$$

# Suma de momento angular

También tenemos los operadores producto como por ejemplo

$$
\begin{aligned}
J_1^2|j_1, j_2, m_1 m_2\rangle &:= (J_1^2 \otimes \mathrm{Id})|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle && (24)\\
&= J_1^2|j_1, m_1\rangle \otimes \mathrm{Id}|j_2, m_2\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle && (25)\\
&= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, j_2, m_1 m_2\rangle. && (26)
\end{aligned}
$$

Con lo cual tenemos la relación de conmutación

$$[J_1, J_2] = 0. \tag{27}$$

# Suma de momento angular

También tenemos los operadores producto como por ejemplo

$$\begin{aligned} J_1^2|j_1,j_2,m_1m_2\rangle &:= (J_1^2\otimes \mathrm{Id})|j_1,m_1\rangle\otimes|j_2,m_2\rangle && (24)\\ &= J_1^2|j_1,m_1\rangle\otimes \mathrm{Id}|j_2,m_2\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1,m_1\rangle\otimes|j_2,m_2\rangle && (25)\\ &= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1,j_2,m_1m_2\rangle. && (26)\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos la relación de conmutación

$$[J_1, J_2] = 0. \tag{27}$$

En este espacio de Hilbert global podemos definir el operador momento angular total

$$\mathrm{J} := \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2. \tag{28}$$

También tenemos los operadores producto como por ejemplo

$$
\begin{aligned}
J_1^2|j_1, j_2, m_1 m_2\rangle &:= (J_1^2 \otimes \mathrm{Id})|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle && (24)\\
&= J_1^2|j_1, m_1\rangle \otimes \mathrm{Id}|j_2, m_2\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle && (25)\\
&= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, j_2, m_1 m_2\rangle. && (26)
\end{aligned}
$$

Con lo cual tenemos la relación de conmutación

$$
[J_1, J_2] = 0. \tag{27}
$$

En este espacio de Hilbert global podemos definir el operador momento angular total

$$
\mathrm{J} := \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2. \tag{28}
$$

Es fácil ver que este operador J satisface efectivamente el álgebra de momento angular

$$
\begin{aligned}
[J_k, J_l] &= [J_{1k} + J_{2k}, J_{1l} + J_{2l}] && (29)\\
&= [J_{1k}, J_{1l}] + \cancel{[J_{1k}, J_{2l}]} + \cancel{[J_{2k}, J_{1l}]} + [J_{2k}, J_{2l}] && (30)\\
&= i\hbar\epsilon_{klm}(J_{1m} + J_{2m}) = i\hbar\epsilon_{klm} J_m. && (31)
\end{aligned}
$$

De lo cual se deduce que este operador tiene todas las propiedades que ya estudiamos previamente.

# Suma de momento angular

En particular, si definimos

$$J^2 := J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \tag{32}$$

En particular, si definimos

$$J^2 := J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \tag{32}$$

tenemos que

$$[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0 \tag{33}$$

$$[J^2, J_1^2] = [J^2, J_2^2] = 0 \tag{34}$$

$$[J_z, J_1^2] = [J_z, J_2^2] = 0, \tag{35}$$

En particular, si definimos

$$J^2 := J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \tag{32}$$

tenemos que

$$[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0 \tag{33}$$

$$[J^2, J_1^2] = [J^2, J_2^2] = 0 \tag{34}$$

$$[J_z, J_1^2] = [J_z, J_2^2] = 0, \tag{35}$$

es decir que

$$\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\} \tag{36}$$

forma un conjunto completo de operadores que conmutan.

En particular, si definimos

$$J^2 := J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \tag{32}$$

tenemos que

$$[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0 \tag{33}$$

$$[J^2, J_1^2] = [J^2, J_2^2] = 0 \tag{34}$$

$$[J_z, J_1^2] = [J_z, J_2^2] = 0, \tag{35}$$

es decir que

$$\{J_1^2, J_2^2, J^2, J_z\} \tag{36}$$

forma un conjunto completo de operadores que conmutan.De esto deducimos que podemos tomar otra base ortonormal $\{|j_1, j_2; j, m\rangle\}$ de $\mathcal{H}$ formada por autoestados comunes de estos operadores

$$J_1^2|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar^2 j_1(j_1 + 1)|j_1, j_2; j, m\rangle \tag{37}$$

$$J_2^2|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar^2 j_2(j_2 + 1)|j_1, j_2; j, m\rangle \tag{38}$$

$$J^2|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar^2 j(j + 1)|j_1, j_2; j, m\rangle \tag{39}$$

$$J_z|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar m|j_1, j_2; j, m\rangle. \tag{40}$$

# Suma de momento angular

Como siempre que tenemos un operador de momento angular podemos definir

$$J_{\pm} := J_x \pm iJ_y = (J_{1x} + J_{2x}) \pm i(J_{1y} + J_{2y}) \tag{41}$$

## Suma de momento angular

Como siempre que tenemos un operador de momento angular podemos definir

$$J_{\pm} := J_x \pm iJ_y = (J_{1x} + J_{2x}) \pm i(J_{1y} + J_{2y}) \tag{41}$$

$$J_{\pm} = J_{1\pm} + J_{2\pm} \tag{42}$$

que satisface

$$J_{\pm}|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j_1, j_2; j, m \pm 1\rangle. \tag{43}$$

## Suma de momento angular

Como siempre que tenemos un operador de momento angular podemos definir

$$J_{\pm} := J_x \pm iJ_y = (J_{1x} + J_{2x}) \pm i(J_{1y} + J_{2y}) \tag{41}$$

$$J_{\pm} = J_{1\pm} + J_{2\pm} \tag{42}$$

que satisface

$$J_{\pm}|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j_1, j_2; j, m \pm 1\rangle. \tag{43}$$

Además será útil notar

$$J^2 = (\mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2)^2 = J_1^2 + 2\mathrm{J}_1 \cdot \mathrm{J}_2 + J_2^2 \tag{44}$$

# Suma de momento angular

Como siempre que tenemos un operador de momento angular podemos definir

$$J_\pm := J_x \pm iJ_y = (J_{1x} + J_{2x}) \pm i(J_{1y} + J_{2y}) \tag{41}$$

$$J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm} \tag{42}$$

que satisface

$$J_\pm|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j_1, j_2; j, m\pm 1\rangle. \tag{43}$$

Además será útil notar

$$J^2 = (\mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2)^2 = J_1^2 + 2\mathrm{J}_1 \cdot \mathrm{J}_2 + J_2^2 \tag{44}$$

$$\mathrm{J}_1 \cdot \mathrm{J}_2 = J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z} \tag{45}$$

Como siempre que tenemos un operador de momento angular podemos definir

$$J_\pm := J_x \pm iJ_y = (J_{1x} + J_{2x}) \pm i(J_{1y} + J_{2y}) \tag{41}$$

$$J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm} \tag{42}$$

que satisface

$$J_\pm|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j_1, j_2; j, m\pm 1\rangle. \tag{43}$$

Además será útil notar

$$J^2 = (\mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2)^2 = J_1^2 + 2\mathrm{J}_1 \cdot \mathrm{J}_2 + J_2^2 \tag{44}$$

$$\mathrm{J}_1 \cdot \mathrm{J}_2 = J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z} \tag{45}$$

$$= \frac{1}{2}(J_{1+} + J_{1-})\frac{1}{2}(J_{2+} + J_{2-}) + \frac{1}{2i}(J_{1+} - J_{1-})\frac{1}{2i}(J_{2+} - J_{2-}) + J_{1z}J_{2z} \tag{46}$$

# Suma de momento angular

Como siempre que tenemos un operador de momento angular podemos definir

$$J_{\pm} := J_x \pm iJ_y = (J_{1x} + J_{2x}) \pm i(J_{1y} + J_{2y}) \tag{41}$$

$$J_{\pm} = J_{1\pm} + J_{2\pm} \tag{42}$$

que satisface

$$J_{\pm}|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j_1, j_2; j, m \pm 1\rangle. \tag{43}$$

Además será útil notar

$$J^2 = (\mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2)^2 = J_1^2 + 2\mathrm{J}_1 \cdot \mathrm{J}_2 + J_2^2 \tag{44}$$

$$\mathrm{J}_1 \cdot \mathrm{J}_2 = J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z} \tag{45}$$

$$= \frac{1}{2}(J_{1+} + J_{1-})\frac{1}{2}(J_{2+} + J_{2-}) + \frac{1}{2i}(J_{1+} - J_{1-})\frac{1}{2i}(J_{2+} - J_{2-}) + J_{1z}J_{2z} \tag{46}$$

$$= \frac{1}{2}(J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}) + J_{1z}J_{2z}. \tag{47}$$

A menudo nos restringiremos a los subespacios con $j_1$ y $j_2$ fijos y notaremos simplemente

$$|j, m\rangle := |j_1, j_2; j, m\rangle \tag{48}$$

$$|m_1, m_2\rangle := |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle. \tag{49}$$

A menudo nos restringiremos a los subespacios con $j_1$ y $j_2$ fijos y notaremos simplemente

$$|j, m\rangle := |j_1, j_2; j, m\rangle \tag{48}$$

$$|m_1, m_2\rangle := |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle. \tag{49}$$

Tenemos así dos descripciones alternativas (dos bases) del momento angular en el sistema compuesto. Una de ella consiste en estados del momento angular total del sistema y otra describe el momento angular de cada parte. Es importante entonces conocer la relación entre ambas. Así, por ejemplo, si medimos el momento angular total del sistema podremos saber cuál es la probabilidad de que una parte tenga cierto estado.

A menudo nos restringiremos a los subespacios con $j_1$ y $j_2$ fijos y notaremos simplemente

$$|j, m\rangle := |j_1, j_2; j, m\rangle \tag{48}$$

$$|m_1, m_2\rangle := |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle. \tag{49}$$

Tenemos así dos descripciones alternativas (dos bases) del momento angular en el sistema compuesto. Una de ella consiste en estados del momento angular total del sistema y otra describe el momento angular de cada parte. Es importante entonces conocer la relación entre ambas. Así, por ejemplo, si medimos el momento angular total del sistema podremos saber cuál es la probabilidad de que una parte tenga cierto estado.El cambio de base entre ambas es

$$|j_1, j_2; j, m\rangle = \left(\sum_{m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\langle j_1, j_2; m_1, m_2|\right) |j_1, j_2; j, m\rangle \tag{50}$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m\rangle |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{j,m}_{j_1, j_2; m_1, m_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle, \tag{51}$$

donde definimos a los coeficientes de Clebsch-Gordan

$$\boxed{C^{j,m}_{j_1, j_2; m_1, m_2} = \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2; j, m\rangle}. \tag{52}$$

Noten que no sumamos sobre $j_1$ y $j_2$ porque autovectores de distinto autovalor son siempre ortogonales.

# Suma de momento angular

Como habrán visto en la teórica se tiene que $j$ puede ser cualquier entero tal que

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \tag{53}$$

Como habrán visto en la teórica se tiene que $j$ puede ser cualquier entero tal que

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \tag{53}$$

Además como los estados de la base producto son también autoestados de $J_z$

$$J_z|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = (J_{1z} + J_{2z})|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = (m_1 + m_2)|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{54}$$

# Suma de momento angular

Como habrán visto en la teórica se tiene que $j$ puede ser cualquier entero tal que

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \tag{53}$$

Además como los estados de la base producto son también autoestados de $J_z$

$$J_z|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = (J_{1z} + J_{2z})|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = (m_1 + m_2)|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{54}$$

tenemos que

$$\left(\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J_z\right)|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar(m_1 + m_2)\langle j_1, j_2; m_1, m_2|j_1, j_2; j, m\rangle \tag{55}$$

Como habrán visto en la teórica se tiene que $j$ puede ser cualquier entero tal que

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \tag{53}$$

Además como los estados de la base producto son también autoestados de $J_z$

$$J_z|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = (J_{1z} + J_{2z})|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = (m_1 + m_2)|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{54}$$

tenemos que

$$(\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J_z)\,|j_1, j_2; j, m\rangle = \hbar(m_1 + m_2)\langle j_1, j_2; m_1, m_2|j_1, j_2; j, m\rangle \tag{55}$$

pero por otro lado

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2|\,(J_z|j_1, j_2; j, m\rangle) = \hbar m\langle j_1, j_2; m_1, m_2|j_1, j_2; j, m\rangle \tag{56}$$

$$\implies \hbar(m_1 + m_2 - m)\langle j_1, j_2; m_1, m_2|j_1, j_2; j, m\rangle = 0, \tag{57}$$

es que decir que o bien $m = m_1 + m_2$ o bien
$C^{j,m}_{j_1,j_2;m_1,m_2} = \langle j_1, j_2; m_1, m_2|j_1, j_2; j, m\rangle = 0.$

En resumen, de estas propiedades deducimos que para que el coeficientes de Clebsch-Gordan, sea distinto de cero es necesario que

$$m = m_1 + m_2 \text{ y } |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \tag{58}$$

Además, como las fases globales de los estados $|j, m\rangle$ son arbitrarias, se pueden elegir de forma tal de que los coeficientes de Clebsch-Gordan sean reales. Estos coeficientes son extremadamente útiles y se encuentran tabulados. Sin embargo para entender cómo obtenerlos y utilizarlos vamos a resolver algunos casos particulares.

# Ejercicio 65

Consideremos dos partículas con spin $1/2$. Llamamos $\mathsf{S}_1$ y $\mathsf{S}_2$ a los operadores de spin correspondientes a las partículas 1 y 2 respectivamente. En este caso tenemos $j_1 = s_1 = 1/2$ y $j_2 = s_2 = 1/2$ y para simplificar más la notación escribimos a los vectores de la base producto como $|j_1 = 1/2, j_2 = 1/2; m_1 = \pm 1/2, m_2 = \pm 1/2\rangle = |\pm, \pm\rangle$. Así tenemos la base producto

$$B_p = \{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle\}. \tag{59}$$

# Ejercicio 65

Consideremos dos partículas con spin $1/2$. Llamamos $\mathsf{S}_1$ y $\mathsf{S}_2$ a los operadores de spin correspondientes a las partículas 1 y 2 respectivamente. En este caso tenemos $j_1 = s_1 = 1/2$ y $j_2 = s_2 = 1/2$ y para simplificar más la notación escribimos a los vectores de la base producto como $|j_1 = 1/2, j_2 = 1/2; m_1 = \pm 1/2, m_2 = \pm 1/2\rangle = |\pm, \pm\rangle$. Así tenemos la base producto

$$B_p = \{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle\}. \tag{59}$$

El operador de spin total es

$$\mathsf{S} := \mathsf{S}_1 + \mathsf{S}_2 \tag{60}$$

y los autoestados comunes de $S^2$ y $S_z$ son los $|s, m\rangle$ con

$$|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2 \tag{61}$$

$$0 = |1/2 - 1/2| \leq s \leq s_1 + s_2 = 1/2 + 1/2 = 1 \tag{62}$$

$$\implies s = 0, 1 \tag{63}$$

y $m = -s, -s+1, ..., s-1, s$.

## Ejercicio 65

Consideremos dos partículas con spin $1/2$. Llamamos $\mathsf{S}_1$ y $\mathsf{S}_2$ a los operadores de spin correspondientes a las partículas 1 y 2 respectivamente. En este caso tenemos $j_1 = s_1 = 1/2$ y $j_2 = s_2 = 1/2$ y para simplificar más la notación escribimos a los vectores de la base producto como $|j_1 = 1/2, j_2 = 1/2; m_1 = \pm 1/2, m_2 = \pm 1/2\rangle = |\pm, \pm\rangle$. Así tenemos la base producto

$$B_p = \{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle\}. \tag{59}$$

El operador de spin total es

$$\mathsf{S} := \mathsf{S}_1 + \mathsf{S}_2 \tag{60}$$

y los autoestados comunes de $S^2$ y $S_z$ son los $|s, m\rangle$ con

$$|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2 \tag{61}$$

$$0 = |1/2 - 1/2| \leq s \leq s_1 + s_2 = 1/2 + 1/2 = 1 \tag{62}$$

$$\implies s = 0, 1 \tag{63}$$

y $m = -s, -s+1, ..., s-1, s$. Así la base de momento angular total es

$$B_s = \{|s=1, m=1\rangle, |s=1, m=0\rangle, |s=1, m=-1\rangle, |s=0, m=0\rangle\} \tag{64}$$

que tiene efectivamente 4 elementos como la base producto.

## Ejercicio 65

Busquemos los coeficientes de Clebsch-Gordan para este caso particular, es decir, escribamos a los vectores de la base $B_s$ en términos de los de $B_p$.

# Ejercicio 65

Busquemos los coeficientes de Clebsch-Gordan para este caso particular, es decir, escribamos a los vectores de la base $B_s$ en términos de los de $B_p$.Para eso podemos notar que el estado de mayor proyección de momento angular será $|+,+\rangle$. En efecto, como vimos este es autovector de $S_z$ con el máximo autovalor $m = 1/2 + 1/2 = +1$ con lo cual debe ser proporcional a $|s = 1, m = 1\rangle$. Tomaremos la constante de proporcionalidad igual a 1

$$\boxed{|s = 1, m = +1\rangle = |+,+\rangle = |1/2, 1/2; +1/2, +1/2\rangle}. \tag{65}$$

# Ejercicio 65

Busquemos los coeficientes de Clebsch-Gordan para este caso particular, es decir, escribamos a los vectores de la base $B_s$ en términos de los de $B_p$.Para eso podemos notar que el estado de mayor proyección de momento angular será $|+,+\rangle$. En efecto, como vimos este es autovector de $S_z$ con el máximo autovalor $m = 1/2 + 1/2 = +1$ con lo cual debe ser proporcional a $|s = 1, m = 1\rangle$. Tomaremos la constante de proporcionalidad igual a 1

$$\boxed{|s = 1, m = +1\rangle = |+,+\rangle = |1/2, 1/2; +1/2, +1/2\rangle}. \tag{65}$$

Así tenemos que

$$|s = 1, m = +1\rangle = C^{1,+1}_{1/2,1/2;+1/2,+1/2}|1/2, 1/2; +1/2, +1/2\rangle \tag{66}$$

$$+ C^{1,+1}_{1/2,1/2;+1/2,-1/2}|1/2, 1/2; +1/2, -1/2\rangle \tag{67}$$

$$+ C^{1,+1}_{1/2,1/2;-1/2,+1/2}|1/2, 1/2; -1/2, +1/2\rangle \tag{68}$$

$$+ C^{1,+1}_{1/2,1/2;-1/2,-1/2}|1/2, 1/2; -1/2, -1/2\rangle \tag{69}$$

# Ejercicio 65

Busquemos los coeficientes de Clebsch-Gordan para este caso particular, es decir, escribamos a los vectores de la base $B_s$ en términos de los de $B_p$.Para eso podemos notar que el estado de mayor proyección de momento angular será $|+,+\rangle$. En efecto, como vimos este es autovector de $S_z$ con el máximo autovalor $m = 1/2 + 1/2 = +1$ con lo cual debe ser proporcional a $|s = 1, m = 1\rangle$. Tomaremos la constante de proporcionalidad igual a 1

$$\boxed{|s = 1, m = +1\rangle = |+,+\rangle = |1/2, 1/2; +1/2, +1/2\rangle}. \tag{65}$$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}
|s = 1, m = +1\rangle = {} & C^{1,+1}_{1/2,1/2;+1/2,+1/2}|1/2, 1/2; +1/2, +1/2\rangle & (66)\\
& + C^{1,+1}_{1/2,1/2;+1/2,-1/2}|1/2, 1/2; +1/2, -1/2\rangle & (67)\\
& + C^{1,+1}_{1/2,1/2;-1/2,+1/2}|1/2, 1/2; -1/2, +1/2\rangle & (68)\\
& + C^{1,+1}_{1/2,1/2;-1/2,-1/2}|1/2, 1/2; -1/2, -1/2\rangle & (69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\ & C^{1,+1}_{1/2,1/2;+1/2,+1/2} = 1, & (70)\\
& C^{1,+1}_{1/2,1/2;+1/2,-1/2} = C^{1,+1}_{1/2,1/2;-1/2,+1/2} = C^{1,+1}_{1/2,1/2;-1/2,-1/2} = 0 & (71)
\end{aligned}$$

# Ejercicio 65

Podemos encontrar los vectores $|1,0\rangle$ y $|1,-1\rangle$ aplicando el operador $S_-$

$$S_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{1*(1+1)-1*(1-1)}|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \tag{72}$$

# Ejercicio 65

Podemos encontrar los vectores $|1,0\rangle$ y $|1,-1\rangle$ aplicando el operador $S_-$

$$S_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{1*(1+1)-1*(1-1)}|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \tag{72}$$

$$\implies \boxed{|1,0\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}S_-|1,1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-}+S_{2-})|+,+\rangle \tag{73}$$

# Ejercicio 65

Podemos encontrar los vectores $|1,0\rangle$ y $|1,-1\rangle$ aplicando el operador $S_-$

$$S_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{1*(1+1)-1*(1-1)}|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \tag{72}$$

$$\implies \boxed{|1,0\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}S_-|1,1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-}+S_{2-})|+,+\rangle \tag{73}$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-}|+,+\rangle + S_{2-}|+,+\rangle) \tag{74}$$

# Ejercicio 65

Podemos encontrar los vectores $|1,0\rangle$ y $|1,-1\rangle$ aplicando el operador $S_-$

$$S_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{1*(1+1)-1*(1-1)}|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \tag{72}$$

$$\implies \boxed{|1,0\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_-|1,1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-} + S_{2-})|+,+\rangle \tag{73}$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-}|+,+\rangle + S_{2-}|+,+\rangle) \tag{74}$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(\hbar|-,+\rangle + \hbar|+,-\rangle) \tag{75}$$

# Ejercicio 65

Podemos encontrar los vectores $|1,0\rangle$ y $|1,-1\rangle$ aplicando el operador $S_-$

$$S_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{1*(1+1)-1*(1-1)}|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \tag{72}$$

$$\Longrightarrow \boxed{|1,0\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}S_-|1,1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-}+S_{2-})|+,+\rangle \tag{73}$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-}|+,+\rangle + S_{2-}|+,+\rangle) \tag{74}$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(\hbar|-,+\rangle + \hbar|+,-\rangle) \tag{75}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(|-,+\rangle + |+,-\rangle)}. \tag{76}$$

# Ejercicio 65

Podemos encontrar los vectores $|1,0\rangle$ y $|1,-1\rangle$ aplicando el operador $S_-$

$$S_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{1*(1+1)-1*(1-1)}|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \tag{72}$$

$$\implies \boxed{|1,0\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}S_-|1,1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-}+S_{2-})|+,+\rangle \tag{73}$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-}|+,+\rangle + S_{2-}|+,+\rangle) \tag{74}$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(\hbar|-,+\rangle + \hbar|+,-\rangle) \tag{75}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(|-,+\rangle + |+,-\rangle)}. \tag{76}$$

$$\implies C^{1,0}_{1/2,1/2;+1/2,+1/2} = C^{1,0}_{1/2,1/2;-1/2,-1/2} = 0, \tag{77}$$

$$C^{1,0}_{1/2,1/2;+1/2,-1/2} = C^{1,0}_{1/2,1/2;-1/2,+1/2} = 1/\sqrt{2} \tag{78}$$

# Ejercicio 65

De la misma forma

$$\boxed{|1,-1\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_- |1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (S_{1-} + S_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|-,+\rangle + |+,-\rangle) \tag{79}$$

# Ejercicio 65

De la misma forma

$$\boxed{|1,-1\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_- |1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (S_{1-} + S_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|-,+\rangle + |+,-\rangle) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (\cancel{S_{1-}|-,+\rangle} + S_{2-}|-,+\rangle + S_{1-}|+,-\rangle + \cancel{S_{2-}|+,-\rangle}) \tag{80}$$

# Ejercicio 65

De la misma forma

$$\boxed{|1,-1\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_- |1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (S_{1-} + S_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|-,+\rangle + |+,-\rangle) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (\cancel{S_{1-}|-,+\rangle} + S_{2-}|-,+\rangle + S_{1-}|+,-\rangle + \cancel{S_{2-}|+,-\rangle}) \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (\hbar|-,-\rangle + \hbar|-,-\rangle) \tag{81}$$

# Ejercicio 65

De la misma forma

$$\boxed{|1,-1\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_-|1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-} + S_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}(|-,+\rangle + |+,-\rangle) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2\hbar}(\cancel{S_{1-}|-,+\rangle} + S_{2-}|-,+\rangle + S_{1-}|+,-\rangle + \cancel{S_{2-}|+,-\rangle}) \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2\hbar}(\hbar|-,-\rangle + \hbar|-,-\rangle) \tag{81}$$

$$\boxed{= |-,-\rangle}. \tag{82}$$

## Ejercicio 65

De la misma forma

$$\boxed{|1,-1\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_- |1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (S_{1-} + S_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|-,+\rangle + |+,-\rangle) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (\cancel{S_{1-}|-,+\rangle} + S_{2-}|-,+\rangle + S_{1-}|+,-\rangle + \cancel{S_{2-}|+,-\rangle}) \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (\hbar|-,-\rangle + \hbar|-,-\rangle) \tag{81}$$

$$\boxed{= |-,-\rangle}\,. \tag{82}$$

Estos estados forman el triplete de spin 1 $\{|+,+\rangle, (|+,-\rangle + |-,+\rangle)/\sqrt{2}, |-,-\rangle\}$.

# Ejercicio 65

De la misma forma

$$\boxed{|1,-1\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_- |1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (S_{1-} + S_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|-,+\rangle + |+,-\rangle) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (\cancel{S_{1-}|-,+\rangle} + S_{2-}|-,+\rangle + S_{1-}|+,-\rangle + \cancel{S_{2-}|+,-\rangle}) \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (\hbar|-,-\rangle + \hbar|-,-\rangle) \tag{81}$$

$$\boxed{= |-,-\rangle}\,. \tag{82}$$

Estos estados forman el triplete de spin 1 $\{|+,+\rangle, (|+,-\rangle + |-,+\rangle)/\sqrt{2}, |-,-\rangle\}$. Por último, el estado $|0,0\rangle$ debe ser ortogonal al $|1,1\rangle = |+,+\rangle$ y al $|1,-1\rangle = |-,-\rangle$, puesto que es otro autovector de $J^2$ con distinto autovalor, por lo que debe ser de la forma

$$|0,0\rangle = \alpha| + -\rangle + \beta|-,+\rangle \tag{83}$$

## Ejercicio 65

De la misma forma

$$\boxed{|1,-1\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_- |1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}}(S_{1-} + S_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}(|-,+\rangle + |+,-\rangle) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2\hbar}(\cancel{S_{1-}|-,+\rangle} + S_{2-}|-,+\rangle + S_{1-}|+,-\rangle + \cancel{S_{2-}|+,-\rangle}) \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2\hbar}(\hbar|-,-\rangle + \hbar|-,-\rangle) \tag{81}$$

$$\boxed{= |-,-\rangle}\,. \tag{82}$$

Estos estados forman el triplete de spin 1 $\{|+,+\rangle, (|+,-\rangle + |-,+\rangle)/\sqrt{2}, |-,-\rangle\}$. Por último, el estado $|0,0\rangle$ debe ser ortogonal al $|1,1\rangle = |+,+\rangle$ y al $|1,-1\rangle = |-,-\rangle$, puesto que es otro autovector de $J^2$ con distinto autovalor, por lo que debe ser de la forma

$$|0,0\rangle = \alpha|+-\rangle + \beta|-,+\rangle \tag{83}$$

y debe además ser ortogonal al $|1,0\rangle$

$$0 = \langle 1,0|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle -,+| + \langle +,-|)(\alpha|+-\rangle + \beta|-,+\rangle) \tag{84}$$

# Ejercicio 65

De la misma forma

$$\boxed{|1,-1\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} S_- |1,0\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} (S_{1-} + S_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|-,+\rangle + |+,-\rangle) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (\cancel{S_{1-}|-,+\rangle} + S_{2-}|-,+\rangle + S_{1-}|+,-\rangle + \cancel{S_{2-}|+,-\rangle}) \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2\hbar} (\hbar|-,-\rangle + \hbar|-,-\rangle) \tag{81}$$

$$\boxed{= |-,-\rangle}\,. \tag{82}$$

Estos estados forman el triplete de spin 1 $\{|+,+\rangle, (|+,-\rangle + |-,+\rangle)/\sqrt{2}, |-,-\rangle\}$. Por último, el estado $|0,0\rangle$ debe ser ortogonal al $|1,1\rangle = |+,+\rangle$ y al $|1,-1\rangle = |-,-\rangle$, puesto que es otro autovector de $J^2$ con distinto autovalor, por lo que debe ser de la forma

$$|0,0\rangle = \alpha| +-\rangle + \beta|-,+\rangle \tag{83}$$

y debe además ser ortogonal al $|1,0\rangle$

$$0 = \langle 1,0|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle -,+| + \langle +,-|)(\alpha| +-\rangle + \beta|-,+\rangle) \tag{84}$$

$$\implies \alpha = -\beta. \tag{85}$$

# Ejercicio 65

Además debe estar normalizado

$$1 = \langle 0,0|0,0\rangle = \alpha^*(\langle +-| - \langle -,+|)\alpha(|+-\rangle - |-,+\rangle) = 2|\alpha|^2 \qquad (86)$$

$$\implies \alpha = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}. \qquad (87)$$

# Ejercicio 65

Además debe estar normalizado

$$1 = \langle 0,0|0,0\rangle = \alpha^*(\langle + - | - \langle -,+|)\alpha(| + -\rangle - |-,+\rangle) = 2|\alpha|^2 \tag{86}$$

$$\implies \alpha = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}. \tag{87}$$

Finalmente tomamos $\theta = 0$ para que el coeficiente de Clebsch-Gordan sea real y tenemos

$$\boxed{|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| + -\rangle - |-,+\rangle)}. \tag{88}$$

Este estado se conoce como singlete.

# Ejercicio 65

Además debe estar normalizado

$$1 = \langle 0,0|0,0\rangle = \alpha^*(\langle + - | - \langle -,+|)\alpha(|+-\rangle - |-,+\rangle) = 2|\alpha|^2 \tag{86}$$

$$\implies \alpha = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}. \tag{87}$$

Finalmente tomamos $\theta = 0$ para que el coeficiente de Clebsch-Gordan sea real y tenemos

$$\boxed{|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-,+\rangle)}. \tag{88}$$

Este estado se conoce como singlete.

$$\implies C^{1,-1}_{1/2,1/2;+1/2,+1/2} = C^{1,-1}_{1/2,1/2;-1/2,-1/2} = 0, \tag{89}$$

$$C^{1,-1}_{1/2,1/2;+1/2,-1/2} = -C^{1,-1}_{1/2,1/2;-1/2,+1/2} = 1/\sqrt{2} \tag{90}$$

# Ejercicio 65

Si definimos el operador de permutación como

$$P|x_1, x_2\rangle = |x_2, x_1\rangle, \tag{91}$$

# Ejercicio 65

Si definimos el operador de permutación como

$$P|x_1, x_2\rangle = |x_2, x_1\rangle, \tag{91}$$

es fácil ver que los estados del triplete son autoestados con autovalor 1

$$P|+,+\rangle = |+,+\rangle \tag{92}$$

# Ejercicio 65

Si definimos el operador de permutación como

$$P|x_1, x_2\rangle = |x_2, x_1\rangle, \tag{91}$$

es fácil ver que los estados del triplete son autoestados con autovalor 1

$$P|+,+\rangle = |+,+\rangle \tag{92}$$

$$P(|+,-\rangle + |-,+\rangle)/\sqrt{2} = (P|+,-\rangle + P|-,+\rangle)/\sqrt{2} = (|-,+\rangle + |+,-\rangle)/\sqrt{2} \tag{93}$$

# Ejercicio 65

Si definimos el operador de permutación como

$$P|x_1, x_2\rangle = |x_2, x_1\rangle, \tag{91}$$

es fácil ver que los estados del triplete son autoestados con autovalor 1

$$P|+,+\rangle = |+,+\rangle \tag{92}$$

$$P(|+,-\rangle + |-,+\rangle)/\sqrt{2} = (P|+,-\rangle + P|-,+\rangle)/\sqrt{2} = (|-,+\rangle + |+,-\rangle)/\sqrt{2} \tag{93}$$

$$P|-,-\rangle = |-,-\rangle. \tag{94}$$

Se dice que estos estados son simetricos ante la permutación de partículas.

## Ejercicio 65

Si definimos el operador de permutación como

$$P|x_1, x_2\rangle = |x_2, x_1\rangle, \tag{91}$$

es fácil ver que los estados del triplete son autoestados con autovalor 1

$$P|+,+\rangle = |+,+\rangle \tag{92}$$

$$P(|+,-\rangle + |-,+\rangle)/\sqrt{2} = (P|+,-\rangle + P|-,+\rangle)/\sqrt{2} = (|-,+\rangle + |+,-\rangle)/\sqrt{2} \tag{93}$$

$$P|-,-\rangle = |-,-\rangle. \tag{94}$$

Se dice que estos estados son simetricos ante la permutación de partículas. Mientras que el estado de singlete tiene autovalor $-1$

$$P(|+,-\rangle - |-,+\rangle)/\sqrt{2} = (P|+,-\rangle - P|-,+\rangle)/\sqrt{2} = (|-,+\rangle - |+,-\rangle)/\sqrt{2} \tag{95}$$

# Ejercicio 65

Si definimos el operador de permutación como

$$P|x_1, x_2\rangle = |x_2, x_1\rangle, \tag{91}$$

es fácil ver que los estados del triplete son autoestados con autovalor 1

$$P|+,+\rangle = |+,+\rangle \tag{92}$$

$$P(|+,-\rangle + |-,+\rangle)/\sqrt{2} = (P|+,-\rangle + P|-,+\rangle)/\sqrt{2} = (|-,+\rangle + |+,-\rangle)/\sqrt{2} \tag{93}$$

$$P|-,-\rangle = |-,-\rangle. \tag{94}$$

Se dice que estos estados son simetricos ante la permutación de partículas. Mientras que el estado de singlete tiene autovalor $-1$

$$P(|+,-\rangle - |-,+\rangle)/\sqrt{2} = (P|+,-\rangle - P|-,+\rangle)/\sqrt{2} = (|-,+\rangle - |+,-\rangle)/\sqrt{2} \tag{95}$$

$$= -(|+,-\rangle - |-,+\rangle)/\sqrt{2}. \tag{96}$$

Esto será importante más adelante cuando estudiemos las propiedades de las partículas idénticas en mecánica cuántica.

## Ejercicio 66

En este caso tenemos una partícula con spin $1/2$ que además tiene un momento angular orbital con $l = 1$. Buscamos escribir los estados de momento angular total

$$\mathsf{J} = \mathsf{L} + \mathsf{S} \tag{97}$$

en función de la base producto de cada momento angular.

# Ejercicio 66

En este caso tenemos una partícula con spin $1/2$ que además tiene un momento angular orbital con $l = 1$. Buscamos escribir los estados de momento angular total

$$\mathsf{J} = \mathsf{L} + \mathsf{S} \tag{97}$$

en función de la base producto de cada momento angular.La base producto en este caso es

$$\{|l = 1, s = 1/2; m_l, m_s\rangle, m_l = 1, 0, -1, m_s = 1/2, -1/2\}, \tag{98}$$

# Ejercicio 66

En este caso tenemos una partícula con spin $1/2$ que además tiene un momento angular orbital con $l = 1$. Buscamos escribir los estados de momento angular total

$$\mathsf{J} = \mathsf{L} + \mathsf{S} \tag{97}$$

en función de la base producto de cada momento angular.La base producto en este caso es

$$\{|l = 1, s = 1/2; m_l, m_s\rangle, m_l = 1, 0, -1, m_s = 1/2, -1/2\}, \tag{98}$$

es decir que tenemos $3 * 2 = 6$ estados posibles

$$B_p = \{|1, \pm\rangle, |0, \pm\rangle, |-1, \pm\rangle\}. \tag{99}$$

## Ejercicio 66

En este caso tenemos una partícula con spin $1/2$ que además tiene un momento angular orbital con $l = 1$. Buscamos escribir los estados de momento angular total

$$\mathsf{J} = \mathsf{L} + \mathsf{S} \tag{97}$$

en función de la base producto de cada momento angular.La base producto en este caso es

$$\{|l = 1, s = 1/2; m_l, m_s\rangle, m_l = 1, 0, -1, m_s = 1/2, -1/2\}, \tag{98}$$

es decir que tenemos $3 * 2 = 6$ estados posibles

$$B_p = \{|1, \pm\rangle, |0, \pm\rangle, |-1, \pm\rangle\}. \tag{99}$$

Mientras que los valores posibles de $j$ para el momento angular total son

$$1 - 1/2 \leq j \leq 1 + 1/2 \tag{100}$$

$$1/2 \leq j \leq 3/2 \tag{101}$$

$$\implies j = 1/2, 3/2. \tag{102}$$

## Ejercicio 66

En este caso tenemos una partícula con spin $1/2$ que además tiene un momento angular orbital con $l = 1$. Buscamos escribir los estados de momento angular total

$$\mathsf{J} = \mathsf{L} + \mathsf{S} \tag{97}$$

en función de la base producto de cada momento angular.La base producto en este caso es

$$\{|l = 1, s = 1/2; m_l, m_s\rangle, m_l = 1, 0, -1, m_s = 1/2, -1/2\}, \tag{98}$$

es decir que tenemos $3 * 2 = 6$ estados posibles

$$B_p = \{|1, \pm\rangle, |0, \pm\rangle, |-1, \pm\rangle\}. \tag{99}$$

Mientras que los valores posibles de $j$ para el momento angular total son

$$1 - 1/2 \leq j \leq 1 + 1/2 \tag{100}$$

$$1/2 \leq j \leq 3/2 \tag{101}$$

$$\implies j = 1/2, 3/2. \tag{102}$$

Así que los estados de la base suma son

$$B_s = \{|3/2, \pm 3/2\rangle, |3/2, \pm 1/2\rangle, \tag{103}$$

$$|1/2, \pm 1/2\rangle\}. \tag{104}$$

## Ejercicio 66

Nuevamente el de máxima proyección corresponde en una base corresponde al de máxima proyección en la otra, es decir,

$$\boxed{|3/2, 3/2\rangle = |1, +\rangle} \tag{105}$$

## Ejercicio 66

Nuevamente el de máxima proyección corresponde en una base corresponde al de máxima proyección en la otra, es decir,

$$\boxed{|3/2, 3/2\rangle = |1, +\rangle} \tag{105}$$

e igualmente para los de mínima proyección

$$\boxed{|3/2, -3/2\rangle = |-1, -\rangle} \tag{106}$$

# Ejercicio 66

Nuevamente el de máxima proyección corresponde en una base corresponde al de máxima proyección en la otra, es decir,

$$\boxed{|3/2, 3/2\rangle = |1, +\rangle} \tag{105}$$

e igualmente para los de mínima proyección

$$\boxed{|3/2, -3/2\rangle = |-1, -\rangle} \tag{106}$$

Calculamos los $|3/2, m\rangle$ restantes aplicando $J_-$

# Ejercicio 66

Nuevamente el de máxima proyección corresponde en una base corresponde al de máxima proyección en la otra, es decir,

$$\boxed{|3/2, 3/2\rangle = |1, +\rangle} \tag{105}$$

e igualmente para los de mínima proyección

$$\boxed{|3/2, -3/2\rangle = |-1, -\rangle} \tag{106}$$

Calculamos los $|3/2, m\rangle$ restantes aplicando $J_-$

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2 * (3/2 + 1) - 3/2 * (3/2 - 1)}|3/2, 1/2\rangle = \hbar\sqrt{3}|3/2, 1/2\rangle \tag{107}$$

$$\implies |3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{3}} J_-|3/2, 3/2\rangle, \tag{108}$$

# Ejercicio 66

Nuevamente el de máxima proyección corresponde en una base corresponde al de máxima proyección en la otra, es decir,

$$\boxed{|3/2, 3/2\rangle = |1, +\rangle} \tag{105}$$

e igualmente para los de mínima proyección

$$\boxed{|3/2, -3/2\rangle = |-1, -\rangle} \tag{106}$$

Calculamos los $|3/2, m\rangle$ restantes aplicando $J_-$

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2 * (3/2+1) - 3/2 * (3/2-1)}|3/2, 1/2\rangle = \hbar\sqrt{3}|3/2, 1/2\rangle \tag{107}$$

$$\implies |3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{3}}J_-|3/2, 3/2\rangle, \tag{108}$$

pero

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = (L_- + S_-)|1, +\rangle = \hbar\sqrt{1 * (1+1) - 1 * (1-1)}|0, +\rangle \tag{109}$$

# Ejercicio 66

Nuevamente el de máxima proyección corresponde en una base corresponde al de máxima proyección en la otra, es decir,

$$\boxed{|3/2, 3/2\rangle = |1, +\rangle} \tag{105}$$

e igualmente para los de mínima proyección

$$\boxed{|3/2, -3/2\rangle = |-1, -\rangle} \tag{106}$$

Calculamos los $|3/2, m\rangle$ restantes aplicando $J_-$

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2 * (3/2 + 1) - 3/2 * (3/2 - 1)}|3/2, 1/2\rangle = \hbar\sqrt{3}|3/2, 1/2\rangle \tag{107}$$

$$\implies |3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{3}} J_-|3/2, 3/2\rangle, \tag{108}$$

pero

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = (L_- + S_-)|1, +\rangle = \hbar\sqrt{1 * (1 + 1) - 1 * (1 - 1)}|0, +\rangle \tag{109}$$

$$+\hbar\sqrt{1/2 * (1/2 + 1) - 1/2 * (1/2 - 1)}|1, -\rangle = \hbar\sqrt{2}|0, +\rangle + \hbar|1, -\rangle \tag{110}$$

## Ejercicio 66

Nuevamente el de máxima proyección corresponde en una base corresponde al de máxima proyección en la otra, es decir,

$$\boxed{|3/2, 3/2\rangle = |1, +\rangle} \tag{105}$$

e igualmente para los de mínima proyección

$$\boxed{|3/2, -3/2\rangle = |-1, -\rangle} \tag{106}$$

Calculamos los $|3/2, m\rangle$ restantes aplicando $J_-$

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2 * (3/2 + 1) - 3/2 * (3/2 - 1)}|3/2, 1/2\rangle = \hbar\sqrt{3}|3/2, 1/2\rangle \tag{107}$$

$$\implies |3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{3}}J_-|3/2, 3/2\rangle, \tag{108}$$

pero

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = (L_- + S_-)|1, +\rangle = \hbar\sqrt{1 * (1 + 1) - 1 * (1 - 1)}|0, +\rangle \tag{109}$$

$$+\hbar\sqrt{1/2 * (1/2 + 1) - 1/2 * (1/2 - 1)}|1, -\rangle = \hbar\sqrt{2}|0, +\rangle + \hbar|1, -\rangle \tag{110}$$

entonces

$$\boxed{|3/2, 1/2\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{3}}(\hbar\sqrt{2}|0, +\rangle + \hbar|1, -\rangle) \tag{111}$$

## Ejercicio 66

Nuevamente el de máxima proyección corresponde en una base corresponde al de máxima proyección en la otra, es decir,

$$\boxed{|3/2, 3/2\rangle = |1, +\rangle} \tag{105}$$

e igualmente para los de mínima proyección

$$\boxed{|3/2, -3/2\rangle = |-1, -\rangle} \tag{106}$$

Calculamos los $|3/2, m\rangle$ restantes aplicando $J_-$

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2 * (3/2 + 1) - 3/2 * (3/2 - 1)}|3/2, 1/2\rangle = \hbar\sqrt{3}|3/2, 1/2\rangle \tag{107}$$

$$\Longrightarrow |3/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{3}} J_-|3/2, 3/2\rangle, \tag{108}$$

pero

$$J_-|3/2, 3/2\rangle = (L_- + S_-)|1, +\rangle = \hbar\sqrt{1 * (1 + 1) - 1 * (1 - 1)}|0, +\rangle \tag{109}$$

$$+\hbar\sqrt{1/2 * (1/2 + 1) - 1/2 * (1/2 - 1)}|1, -\rangle = \hbar\sqrt{2}|0, +\rangle + \hbar|1, -\rangle \tag{110}$$

entonces

$$\boxed{|3/2, 1/2\rangle =} \frac{1}{\hbar\sqrt{3}}(\hbar\sqrt{2}|0, +\rangle + \hbar|1, -\rangle) \tag{111}$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}|0, +\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1, -\rangle}. \tag{112}$$

# Ejercicio 66

Análogamente tenemos

$$J_{-}|3/2, 1/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2 * (3/2 + 1) - 1/2 * (1/2 - 1)}|3/2, -1/2\rangle = 2\hbar|3/2, -1/2\rangle \tag{113}$$

# Ejercicio 66

Análogamente tenemos

$$J_-|3/2, 1/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2 * (3/2+1) - 1/2 * (1/2-1)}|3/2, -1/2\rangle = 2\hbar|3/2, -1/2\rangle \tag{113}$$

$$\implies |3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{2\hbar}J_-|3/2, 1/2\rangle, \tag{114}$$

# Ejercicio 66

Análogamente tenemos

$$J_-|3/2,1/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2*(3/2+1)-1/2*(1/2-1)}|3/2,-1/2\rangle = 2\hbar|3/2,-1/2\rangle \tag{113}$$

$$\implies |3/2,-1/2\rangle = \frac{1}{2\hbar}J_-|3/2,1/2\rangle, \tag{114}$$

pero

$$J_-|3/2,3/2\rangle = (L_- + S_-)(\sqrt{\frac{2}{3}}|0,+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-\rangle) \tag{115}$$

Análogamente tenemos

$$J_-|3/2,1/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2*(3/2+1)-1/2*(1/2-1)}|3/2,-1/2\rangle = 2\hbar|3/2,-1/2\rangle \tag{113}$$

$$\implies |3/2,-1/2\rangle = \frac{1}{2\hbar}J_-|3/2,1/2\rangle, \tag{114}$$

pero

$$J_-|3/2,3/2\rangle = (L_- + S_-)(\sqrt{\frac{2}{3}}|0,+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-\rangle) \tag{115}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}L_-|0,+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}L_-|1,-\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}S_-|0,+\rangle + \cancel{\sqrt{\frac{1}{3}}S_-|1,-\rangle} \tag{116}$$

# Ejercicio 66

Análogamente tenemos

$$J_-|3/2,1/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2*(3/2+1)-1/2*(1/2-1)}|3/2,-1/2\rangle = 2\hbar|3/2,-1/2\rangle \tag{113}$$

$$\implies |3/2,-1/2\rangle = \frac{1}{2\hbar}J_-|3/2,1/2\rangle, \tag{114}$$

pero

$$J_-|3/2,3/2\rangle = (L_- + S_-)(\sqrt{\frac{2}{3}}|0,+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-\rangle) \tag{115}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}L_-|0,+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}L_-|1,-\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}S_-|0,+\rangle + \cancel{\sqrt{\frac{1}{3}}S_-|1,-\rangle} \tag{116}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\sqrt{1*(1+1)-0*(0-1)}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\hbar\sqrt{1*(1+1)-1*(1-1)}|0,-\rangle \tag{117}$$

$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar|0,-\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\sqrt{2}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar|0,-\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar|0,-\rangle \tag{118}$$

## Ejercicio 66

Análogamente tenemos

$$J_-|3/2,1/2\rangle = \hbar\sqrt{3/2*(3/2+1)-1/2*(1/2-1)}|3/2,-1/2\rangle = 2\hbar|3/2,-1/2\rangle \tag{113}$$

$$\implies |3/2,-1/2\rangle = \frac{1}{2\hbar}J_-|3/2,1/2\rangle, \tag{114}$$

pero

$$J_-|3/2,3/2\rangle = (L_- + S_-)(\sqrt{\frac{2}{3}}|0,+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-\rangle) \tag{115}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}L_-|0,+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}L_-|1,-\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}S_-|0,+\rangle + \cancel{\sqrt{\frac{1}{3}}S_-|1,-\rangle} \tag{116}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\sqrt{1*(1+1)-0*(0-1)}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\hbar\sqrt{1*(1+1)-1*(1-1)}|0,-\rangle \tag{117}$$

$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar|0,-\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\sqrt{2}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar|0,-\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar|0,-\rangle \tag{118}$$

$$= 2\hbar\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0,-\rangle\right) \tag{119}$$

# Ejercicio 66

Entonces

$$\boxed{|3/2, -1/2\rangle =} \frac{1}{2\hbar} 2\hbar \left( \sqrt{\frac{1}{3}} |-1, +\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0, -\rangle \right) \tag{120}$$

$$\boxed{= \sqrt{\frac{1}{3}} |-1, +\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0, -\rangle}. \tag{121}$$

Entonces

$$\boxed{|3/2,-1/2\rangle =} \frac{1}{2\hbar}2\hbar\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0,-\rangle\right) \tag{120}$$

$$\boxed{= \sqrt{\frac{1}{3}}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0,-\rangle}. \tag{121}$$

Por otro lado el estado $|1/2,1/2\rangle$ al ser un autoestado de $J_z$ con autovalor $1/2 = m_l + m_s = 0 + 1/2 = 1 - 1/2$ debe ser de la forma

$$|1/2,1/2\rangle = \alpha|0,+\rangle + \beta|1,-\rangle \tag{122}$$

# Ejercicio 66

Entonces

$$\boxed{|3/2, -1/2\rangle =} \frac{1}{2\hbar} 2\hbar \left( \sqrt{\frac{1}{3}} |-1, +\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0, -\rangle \right) \tag{120}$$

$$\boxed{= \sqrt{\frac{1}{3}} |-1, +\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0, -\rangle}. \tag{121}$$

Por otro lado el estado $|1/2, 1/2\rangle$ al ser un autoestado de $J_z$ con autovalor $1/2 = m_l + m_s = 0 + 1/2 = 1 - 1/2$ debe ser de la forma

$$|1/2, 1/2\rangle = \alpha|0, +\rangle + \beta|1, -\rangle \tag{122}$$

y debe ser ortogonal a $|3/2, 1/2\rangle$ (es trivialmente ortogonal a $|3/2, 3/2\rangle$ porque ambos son autoestados de $J_z$ con distinto autovalor)

# Ejercicio 66

Entonces

$$\boxed{|3/2,-1/2\rangle =} \frac{1}{2\hbar}2\hbar\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0,-\rangle\right) \tag{120}$$

$$\boxed{= \sqrt{\frac{1}{3}}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0,-\rangle}. \tag{121}$$

Por otro lado el estado $|1/2,1/2\rangle$ al ser un autoestado de $J_z$ con autovalor $1/2 = m_l + m_s = 0 + 1/2 = 1 - 1/2$ debe ser de la forma

$$|1/2,1/2\rangle = \alpha|0,+\rangle + \beta|1,-\rangle \tag{122}$$

y debe ser ortogonal a $|3/2,1/2\rangle$ (es trivialmente ortogonal a $|3/2,3/2\rangle$ porque ambos son autoestados de $J_z$ con distinto autovalor)

$$0 = \langle 3/2,1/2|1/2,1/2\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0,+| + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 1,-|\right)(\alpha|0,+\rangle + \beta|1,-\rangle) \tag{123}$$

# Ejercicio 66

Entonces

$$\boxed{|3/2,-1/2\rangle =} \frac{1}{2\hbar}2\hbar\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0,-\rangle\right) \tag{120}$$

$$\boxed{= \sqrt{\frac{1}{3}}|-1,+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0,-\rangle}. \tag{121}$$

Por otro lado el estado $|1/2,1/2\rangle$ al ser un autoestado de $J_z$ con autovalor $1/2 = m_l + m_s = 0 + 1/2 = 1 - 1/2$ debe ser de la forma

$$|1/2,1/2\rangle = \alpha|0,+\rangle + \beta|1,-\rangle \tag{122}$$

y debe ser ortogonal a $|3/2,1/2\rangle$ (es trivialmente ortogonal a $|3/2,3/2\rangle$ porque ambos son autoestados de $J_z$ con distinto autovalor)

$$0 = \langle 3/2,1/2|1/2,1/2\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\langle 0,+| + \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 1,-|\right)(\alpha|0,+\rangle + \beta|1,-\rangle) \tag{123}$$

$$0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha + \sqrt{\frac{1}{3}}\beta \implies \beta = -\sqrt{2}\alpha \tag{124}$$

# Ejercicio 66

y pidiendo que el estado esté normalizado tenemos

$$1 = \langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 = 3|\alpha|^2 \tag{125}$$

$$\implies \alpha = \sqrt{1/3} \tag{126}$$

# Ejercicio 66

y pidiendo que el estado esté normalizado tenemos

$$1 = \langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 = 3|\alpha|^2 \tag{125}$$

$$\implies \alpha = \sqrt{1/3} \tag{126}$$

y obtenemos

$$|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle. \tag{127}$$

# Ejercicio 66

y pidiendo que el estado esté normalizado tenemos

$$1 = \langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 = 3|\alpha|^2 \tag{125}$$

$$\implies \alpha = \sqrt{1/3} \tag{126}$$

y obtenemos

$$|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle. \tag{127}$$

Finalmente aplicando $J_-$ podemos obtener el estado $|1/2, -1/2\rangle$

$$J_- |1/2, 1/2\rangle = \hbar |1/2, -1/2\rangle \tag{128}$$

# Ejercicio 66

y pidiendo que el estado esté normalizado tenemos

$$1 = \langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 = 3|\alpha|^2 \tag{125}$$

$$\implies \alpha = \sqrt{1/3} \tag{126}$$

y obtenemos

$$|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle. \tag{127}$$

Finalmente aplicando $J_-$ podemos obtener el estado $|1/2, -1/2\rangle$

$$J_- |1/2, 1/2\rangle = \hbar |1/2, -1/2\rangle \tag{128}$$

$$\boxed{|1/2, -1/2\rangle =} \frac{1}{\hbar} J_- |1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\hbar}\left(L_- + S_-\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{129}$$

# Ejercicio 66

y pidiendo que el estado esté normalizado tenemos

$$1 = \langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 = 3|\alpha|^2 \tag{125}$$

$$\implies \alpha = \sqrt{1/3} \tag{126}$$

y obtenemos

$$|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle. \tag{127}$$

Finalmente aplicando $J_-$ podemos obtener el estado $|1/2, -1/2\rangle$

$$J_-|1/2, 1/2\rangle = \hbar|1/2, -1/2\rangle \tag{128}$$

$$\boxed{|1/2, -1/2\rangle =} \frac{1}{\hbar}J_-|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\hbar}(L_- + S_-)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{129}$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}L_-|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}L_-|1, -\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}S_-|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\cancel{S_-|1, -\rangle}\right) \tag{130}$$

y pidiendo que el estado esté normalizado tenemos

$$1 = \langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 = 3|\alpha|^2 \tag{125}$$

$$\implies \alpha = \sqrt{1/3} \tag{126}$$

y obtenemos

$$|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle. \tag{127}$$

Finalmente aplicando $J_-$ podemos obtener el estado $|1/2, -1/2\rangle$

$$J_-|1/2, 1/2\rangle = \hbar|1/2, -1/2\rangle \tag{128}$$

$$\boxed{|1/2, -1/2\rangle =} \frac{1}{\hbar} J_-|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\hbar}(L_- + S_-)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{129}$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}L_-|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}L_-|1, -\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}S_-|0, +\rangle - \cancel{\sqrt{\frac{2}{3}}S_-|1, -\rangle}\right) \tag{130}$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\hbar\sqrt{2}|-1, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\sqrt{2}|0, -\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0, -\rangle\right) \tag{131}$$

# Ejercicio 66

y pidiendo que el estado esté normalizado tenemos

$$1 = \langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2 \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha|^2 = 3|\alpha|^2 \tag{125}$$

$$\implies \alpha = \sqrt{1/3} \tag{126}$$

y obtenemos

$$|1/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle. \tag{127}$$

Finalmente aplicando $J_-$ podemos obtener el estado $|1/2, -1/2\rangle$

$$J_-|1/2, 1/2\rangle = \hbar|1/2, -1/2\rangle \tag{128}$$

$$\boxed{|1/2, -1/2\rangle =} \frac{1}{\hbar} J_-|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\hbar}(L_- + S_-)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{129}$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}L_-|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}L_-|1, -\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}S_-|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\cancel{S_-|1, -\rangle}\right) \tag{130}$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\hbar\sqrt{2}|-1, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\sqrt{2}|0, -\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0, -\rangle\right) \tag{131}$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}|-1, +\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|0, -\rangle}. \tag{132}$$

# Ejercicio 66

Así podemos calcular, por ejemplo, el valor de expectación de $L_z$ en el estado $|1/2, 1/2\rangle$ como

$$\boxed{\langle 1/2, 1/2|L_z|1/2, 1/2\rangle =} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0, +| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1, -|\right) L_z \left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{133}$$

## Ejercicio 66

Así podemos calcular, por ejemplo, el valor de expectación de $L_z$ en el estado $|1/2, 1/2\rangle$ como

$$\boxed{\langle 1/2, 1/2|L_z|1/2, 1/2\rangle =} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0, +| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1, -|\right) L_z \left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{133}$$

$$= \frac{1}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 1, -|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|1, -\rangle} + \frac{2}{3}\langle 1, -|L_z|1, -\rangle \tag{134}$$

# Ejercicio 66

Así podemos calcular, por ejemplo, el valor de expectación de $L_z$ en el estado $|1/2, 1/2\rangle$ como

$$\boxed{\langle 1/2, 1/2|L_z|1/2, 1/2\rangle =} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0, +| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1, -|\right) L_z \left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{133}$$

$$= \frac{1}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 1, -|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|1, -\rangle} + \frac{2}{3}\langle 1, -|L_z|1, -\rangle \tag{134}$$

$$= \frac{2}{3}\langle 1|L_z|1\rangle\langle -|-\rangle = \boxed{\frac{2}{3}\hbar} \tag{135}$$

# Ejercicio 66

Así podemos calcular, por ejemplo, el valor de expectación de $L_z$ en el estado $|1/2, 1/2\rangle$ como

$$\boxed{\langle 1/2, 1/2|L_z|1/2, 1/2\rangle =} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0, +| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1, -|\right) L_z \left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{133}$$

$$= \frac{1}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 1, -|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|1, -\rangle} + \frac{2}{3}\langle 1, -|L_z|1, -\rangle \tag{134}$$

$$= \frac{2}{3}\langle 1|L_z|1\rangle\langle -|-\rangle = \boxed{\frac{2}{3}\hbar} \tag{135}$$

Mientras que el valor de expectación de $S_z$ en este estado es

$$\boxed{\langle 1/2, 1/2|S_z|1/2, 1/2\rangle =} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0, +| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1, -|\right) S_z \left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{136}$$

# Ejercicio 66

Así podemos calcular, por ejemplo, el valor de expectación de $L_z$ en el estado $|1/2, 1/2\rangle$ como

$$\boxed{\langle 1/2, 1/2|L_z|1/2, 1/2\rangle =} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0, +| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1, -|\right) L_z \left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{133}$$

$$= \frac{1}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 1, -|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|1, -\rangle} + \frac{2}{3}\langle 1, -|L_z|1, -\rangle \tag{134}$$

$$= \frac{2}{3}\langle 1|L_z|1\rangle\langle -|-\rangle = \boxed{\frac{2}{3}\hbar} \tag{135}$$

Mientras que el valor de expectación de $S_z$ en este estado es

$$\boxed{\langle 1/2, 1/2|S_z|1/2, 1/2\rangle =} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0, +| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1, -|\right) S_z \left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{136}$$

$$= \frac{1}{3}\langle 0, +|S_z|0, +\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 1, -|S_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 0, +|S_z|1, -\rangle} + \frac{2}{3}\langle 1, -|S_z|1, -\rangle \tag{137}$$

# Ejercicio 66

Así podemos calcular, por ejemplo, el valor de expectación de $L_z$ en el estado $|1/2, 1/2\rangle$ como

$$\boxed{\langle 1/2, 1/2|L_z|1/2, 1/2\rangle =} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0, +| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1, -|\right) L_z \left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{133}$$

$$= \frac{1}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 1, -|L_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 0, +|L_z|1, -\rangle} + \frac{2}{3}\langle 1, -|L_z|1, -\rangle \tag{134}$$

$$= \frac{2}{3}\langle 1|L_z|1\rangle\langle -|-\rangle = \boxed{\frac{2}{3}\hbar} \tag{135}$$

Mientras que el valor de expectación de $S_z$ en este estado es

$$\boxed{\langle 1/2, 1/2|S_z|1/2, 1/2\rangle =} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\langle 0, +| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1, -|\right) S_z \left(\sqrt{\frac{1}{3}}|0, +\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1, -\rangle\right) \tag{136}$$

$$= \frac{1}{3}\langle 0, +|S_z|0, +\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 1, -|S_z|0, +\rangle} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\langle 0, +|S_z|1, -\rangle} + \frac{2}{3}\langle 1, -|S_z|1, -\rangle \tag{137}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\hbar}{2} + \frac{2}{3}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \boxed{-\frac{\hbar}{6}} \tag{138}$$