

## ENTRELAZAMIENTO

Sistema de dos electrones  $\left\{ \begin{array}{l} |+\rangle_{1,2} , \quad |\uparrow\rangle_{1,2} , \quad |0\rangle_{1,2} \\ |-\rangle_{1,2} , \quad |\downarrow\rangle_{1,2} , \quad |1\rangle_{1,2} \end{array} \right.$

$$|\beta\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 + |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$$

↓ tiene  $S_T = 1$  (espín total)  
 $S_T^z = 0$  (proyección del espín total en z)

$|\beta\rangle$  está entrelazado ya que  $\nexists |\varphi\rangle_1, |\chi\rangle_2 \mid |\beta\rangle = |\varphi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2$ .

¿Para qué sirve esto?

## Máquinas imposibles

"Quantum information theory: An invitation", R. F. Werner

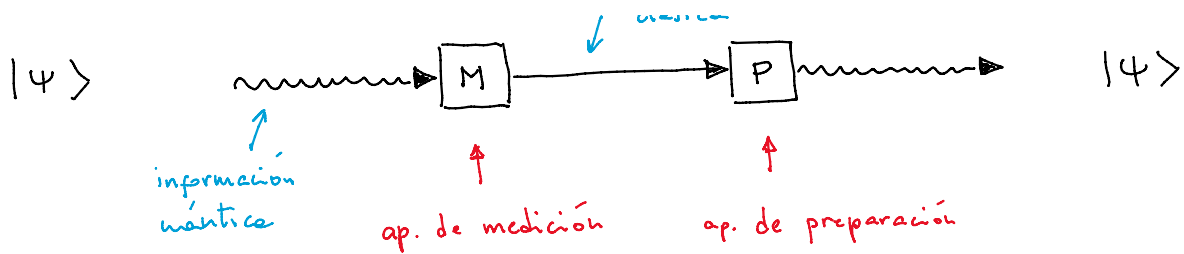
[quant-ph/010106] (arxiv)

- Teleportador (sin entrelazamiento)
- Copiador cuántico universal
- Medidor simultáneo

↓ Jerarquía

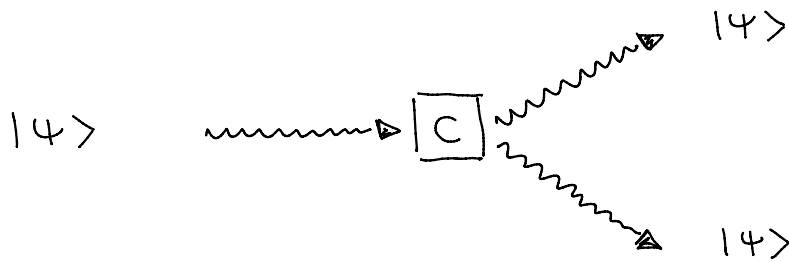
\* Teleportador (sin entrelazamiento)



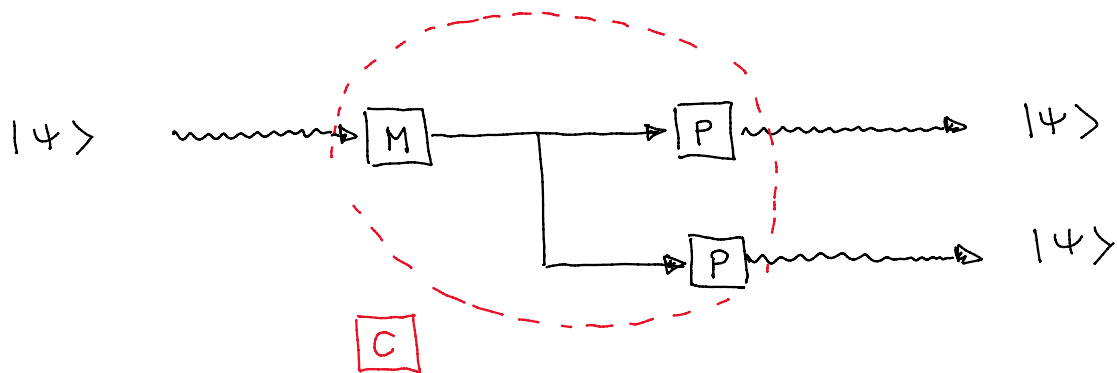


Veamos que si existe un teleportador (s.e.), entonces podemos construir un copiador cuántico universal.

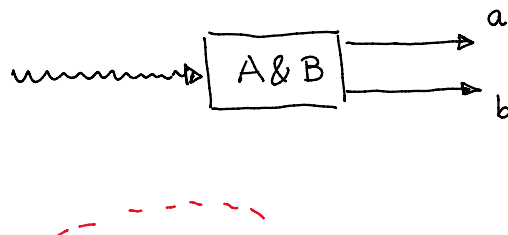
\* Copiador cuántico universal

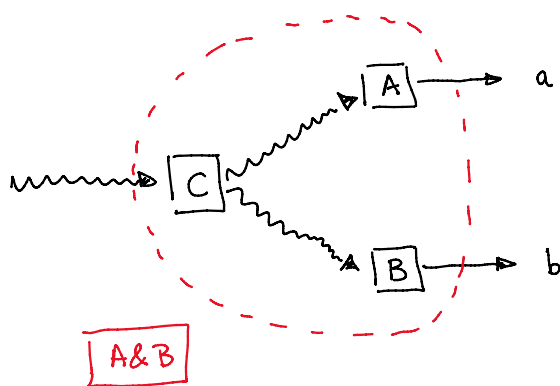


Si tenemos un teleportador, podemos construir un copiador:



\* Medidor simultáneo



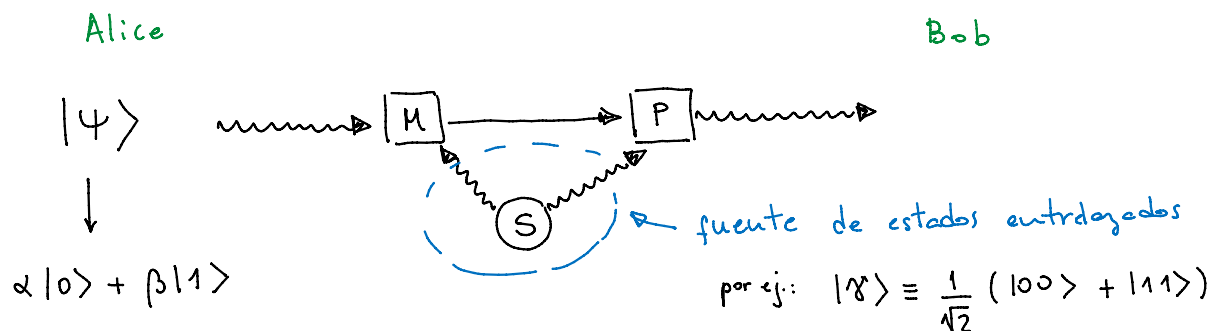


## Entrelazamiento como recurso

Un ejemplo: Teleportación asistida por entrelazamiento

↙ Bennet, Brassard, Crepeau, Jozsa, Peres, Wootters

(Phys. Rev. Lett. 70, 1993)



Estado inicial de los 3  $e^-$ :  $|i\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha|0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle (|00\rangle + |11\rangle)]$$

Compuertas cuánticas:

• CNOT :  $|A, B\rangle \xrightarrow{\text{CNOT}} |A, B \oplus A\rangle$  ↗ suma en módulo 2

$$\begin{aligned}
|0,0\rangle &\longrightarrow |0,0\rangle \\
|0,1\rangle &\longrightarrow |0,1\rangle \\
|1,0\rangle &\longrightarrow |1,1\rangle \\
|1,1\rangle &\longrightarrow |1,0\rangle
\end{aligned}$$

$$U_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Hademard:  $U_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

"Quantum information & computation", Nielsen, Chuang

$$a|0\rangle + b|1\rangle \xrightarrow{U_H} a \cdot \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + b \cdot \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

~~~~~ o ~~~~~

Protocolo de teleportación:

- 1) Alice aplica CNOT sobre sus dos  $e^-$ .
- 2) Alice aplica Hademard al primer qubit.
- 3) Alice hace ciertas mediciones, obtiene ciertos resultados y se los envía a Bob.
- 4) Bob elige qué operación cuántica aplica de acuerdo a los resultados de Alice. Esto le permite obtener el estado  $|\psi\rangle$ .

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha |0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta |1\rangle (|00\rangle + |11\rangle) \right]$$

( 1) Alice aplica CNOT

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \alpha |0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta |1\rangle (|10\rangle + |01\rangle) \right]$$

( 2) Alice aplica Hademard al primer qubit

2) Alice aplica Hadamard al primer qubit

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= \frac{1}{2} \left[ \alpha (|0\rangle + |1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) + \beta (|0\rangle - |1\rangle) (|10\rangle + |01\rangle) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ |00\rangle (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + \right. \\ &\quad \left. + |10\rangle (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \right] \end{aligned}$$

3) Alice mide y le envía resultados a Bob:

- $|00\rangle \Rightarrow$  "Bob no hacer nada"
- $|01\rangle \Rightarrow$  "Bob aplica  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ "
- $|10\rangle \Rightarrow$  "Bob aplica  $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ :  $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \xrightarrow{Z} \overbrace{\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle}^{|\psi\rangle}$ "
- $|11\rangle \Rightarrow$  "Bob aplica  $X$  y luego  $Z$ "

En todos los casos, luego de operar sobre su parte del par entrelazado,

Bob obtiene  $|\psi\rangle$ .

Desigualdades de Bell

[OLVIDAMOS QM POR UN RATO]

|             |
|-------------|
| Alice       |
| $Q = \pm 1$ |
| $R = \pm 1$ |

|             |
|-------------|
| Bob         |
| $S = \pm 1$ |
| $T = \pm 1$ |

- 1) Realismo ( $Q, R, S, T$  tienen valores definidos que existen independientemente de la medición).
- 2) Localidad (las mediciones de A no influyen en el resultado de las mediciones de Bob).

1) + 2) : Principio de realismo local

$$QS + RS + RT - QT = (Q+R)S + (R-Q)T = \pm 2$$

Suponemos que  $p(q, r, s, t)$  que nos dice la probabilidad de que, antes de medir, el sistema se encuentre en un estado con valores  $Q = q, R = r, S = s, T = t$ .

$$E(QS + RS + RT - QT) = \sum_{q,r,s,t} p(q, r, s, t) (qr + rs + rt - qt) =$$

valor  
esperado

$$= E(QS) + E(RS) + E(RT) - E(QT)$$

$$E(QS + RS + RT - QT) = \sum_{q,r,s,t} p(q, r, s, t) \overbrace{(qr + rs + rt - qt)}^{\pm 2} \leq$$

$$\leq \sum_{q,r,s,t} p(q, r, s, t) \cdot 2 = 2$$

$$\sum_{q,r,s,t} p(q, r, s, t) = 1$$

$$\sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t) = 1$$

$$\therefore E(QR) + E(RS) + E(RT) - E(QT) \leq 2 \quad (\text{desigualdad CHSH})$$

(desigualdad de Bell)

[RECORDAMOS QM]

Veamos que si  $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$  existen observables como los de la situación anterior tales que se viola CHSH.

$$\begin{aligned} Q &= \hat{\sigma}_z^A & S &= \frac{-\hat{\sigma}_z^B - \hat{\sigma}_x^B}{\sqrt{2}} \\ R &= \hat{\sigma}_x^A & T &= \frac{\hat{\sigma}_z^B - \hat{\sigma}_x^B}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{todos estos son} \\ \text{observables con} \\ \text{autovalores } \pm 1. \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{AB} | \hat{Q} \hat{S} | \Psi_{AB} \rangle &= 1/\sqrt{2} \\ \langle \Psi_{AB} | \hat{R} \hat{S} | \Psi_{AB} \rangle &= 1/\sqrt{2} \\ \langle \Psi_{AB} | \hat{R} \hat{T} | \Psi_{AB} \rangle &= 1/\sqrt{2} \\ \langle \Psi_{AB} | \hat{Q} \hat{T} | \Psi_{AB} \rangle &= -1/\sqrt{2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \text{EJERCICIO: calcularlos!}$$

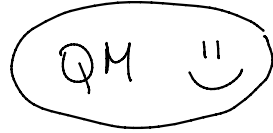
$$\therefore \langle \hat{Q} \hat{S} \rangle + \langle \hat{R} \hat{S} \rangle + \langle \hat{R} \hat{T} \rangle - \langle \hat{Q} \hat{T} \rangle = 2\sqrt{2} > 2 !$$

$\therefore$  QM viola las desigualdades de Bell

$\therefore$  QM no cumple el Principio de Realismo Local

Sin embargo, se comprobó (\*) que la naturaleza viola las desigualdades

Sin embargo, se comprobó<sup>(\*)</sup> que la naturaleza viola las desigualdades de Bell.



(\*) Aspect, Alain (1976) "Proposed experiment to test the nonreparability of QM"  
(Phys. Rev. D 14 (8): 1944-1951)