Física Teórica 2

Guía 6: Simetrías continuas

Mateo Koifman

9 de noviembre de 2021

Simetrías y cargas conservadas

Queremos estudiar cómo implementar transformaciones sobre sistemas cuánticos.

Queremos estudiar también las consecuencias que esto trae cuando estas transformaciones son una simetría del sistema particular que consideramos

Algunos ejemplos de transformaciones de simetría típicas:

- Traslaciones
- Rotaciones
- Boosts
- Transformaciones conformes
- Transformaciones discretas
- Simetrías locales (de gauge)

En esta clase en particular nos vamos a centrar en simetrías continuas globales

Transformaciones

- Las transformaciones van a mapear operadores y estados según

$$A \mapsto A' \qquad |\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle \tag{1}$$

- Cumplen que
  1. Deja invariante los autovalores de A
  2. Deja invariante el producto interno entre estados $\langle\phi|\psi\rangle$

- El **Teorema de Wigner** nos dice que las transformaciones son imlpementadas por un **operador (anti)unitario** U.

$$U \text{ unitario} \qquad \langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle \tag{2}$$

$$U \text{ antiunitario} \qquad \langle\phi'|\psi'\rangle = \langle U\phi|U\psi\rangle = \langle\phi|U^\dagger U\psi\rangle^* = \langle\phi|\psi\rangle^* \tag{3}$$

Para los autoestados $|\phi_n\rangle$ del observable A tenemos

$$A|\phi_n\rangle = a_n|\phi_n\rangle \quad \Rightarrow \quad AU^\dagger U|\phi_n\rangle = a_n U^\dagger U|\phi_n\rangle \quad \Rightarrow \quad UAU^\dagger|\phi'_n\rangle = a_n|\phi'_n\rangle \tag{4}$$

Si queremos que se cumpla $A'|\phi'_n\rangle = a_n|\phi'_n\rangle$, tenemos que

$$(A' - UAU^\dagger)|\phi'_n\rangle = 0 \tag{5}$$

$$A \qquad \mapsto \qquad A' = UAU^\dagger \tag{6}$$

Las transformaciones **continuas** son imlpementadas por un operador **unitario** U. Supongamos por ahora que dependen de un único parámetro s y con $U(0) = 1$

$$U(s) = 1 + U'(0)s + \mathcal{O}(s^2) \tag{7}$$

$$UU^\dagger = 1 + \left[U'(0) + U'^\dagger(0)\right]s + \mathcal{O}(s^2) \tag{8}$$

la condición $UU^\dagger = 1$ implica que $U'(0)$ es antihermítico, o bien,

$$U'(0) = iK \qquad ; \qquad K = K^\dagger \tag{9}$$

Siempre podemos escribir

$$U(s + \Delta s) = U(s)U(\Delta s) \tag{10}$$

Derivando respecto a Δs y luego evaluando en $\Delta s = 0$

$$U'(s) = U(s)U'(0) = U(s)iK \tag{11}$$

$$U(s) = \exp(iKs) \tag{12}$$

Transformaciones continuas

En general para transformaciones que dependen de varios parámetros o *generadores* K_j tenemos

$$U(s_j) = \prod_j \exp(iK_j s_j) \qquad ; \qquad K_j = K_j^\dagger \tag{13}$$

Pedimos además

$$U(\tau_1 \circ \tau_2) = U(\tau_1)U(\tau_2) \tag{14}$$

Tomando $\epsilon << 1$ las últimas dos condiciones implican

$$e^{i\epsilon K_j} e^{i\epsilon K_k} e^{-i\epsilon K_j} e^{-i\epsilon K_k} = U(s_j) \tag{15}$$

$$1 - \epsilon^2 [K_j, K_k] = 1 + i \sum_l K_l s_l \tag{16}$$

$$[K_j, K_k] = i \sum_l f_{jkl} K_l \tag{17}$$

La última ecuación expresa el álgebra de los generadores K_j de las transformaciones

Las constantes de estructura f_{jkl} dependen en particular de qué transformación o grupo consideremos. Por ejemplo en el caso de las rotaciones ($K_j \equiv J_j$), estudiando rotaciones infinitesimales a segundo orden uno encontraba $f_{jkl} = \varepsilon_{jkl}$.

Simetrías y cargas conservadas

Decimos que una transformación unitaria U es una simetría de un sistema si deja invariante el Hamiltoniano

$$UHU^{\dagger} = H \qquad \Leftrightarrow \qquad [U, H] = 0 \tag{18}$$

Si $U(s)$ es una simetría continua y pensamos en una transformación infinitesimal $U(s) = 1 + isK + \dots$, la condición anterior es equivalente a

$$[K, H] = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}K = 0 \tag{19}$$

Es decir, K es una constante de movimiento.

Siempre que hay una simetría contínua, hay una carga conservada (y viceversa). La carga conservada es el generador de la simetría.

Queremos hallar el operador K que genera traslaciones infinitesimales. Es decir

$$(1 + i\vec{K}\cdot\vec{\epsilon})\vec{X}(1 - i\vec{K}\cdot\vec{\epsilon}) = \vec{X} + \vec{\epsilon}1 \tag{20}$$

$$i[\vec{K}\cdot\vec{\epsilon}, \vec{X}] = \vec{\epsilon}1 \tag{21}$$

$$[X_i, K_j] = i\delta_{ij} \tag{22}$$

Reconocemos la relación de conmutación entre x y p, por lo que

$$\vec{K} = \vec{P}/\hbar \qquad ; \qquad U(d) = e^{-i\vec{P}\cdot\vec{d}/\hbar} \tag{23}$$

Pensemos qué sistemas tienen invariancia ante traslaciones, i.e., $[P_i, H] = 0$ para $i = x, y, z$

$$[P_i, H] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[P_i, \frac{P^2}{2m}\right] + \Big[P_i, V(x)\Big] = 0 \tag{24}$$

Tenemos simetría de traslación si y sólo si $V(x) = 0$.
En tal caso el generador de la simetría (el impulso $\vec{P}$) es una cantidad conservada.
Esto es lo que esperamos que suceda si no hay potencial (es decir, no hay fuerzas).

Recordemos también que el **Hamiltoniano** es el generador de la evolución temporal y que la energía es una cantidad conservada cuando H no depende explícitamente del tiempo

Para cualquier sistema con simetría esférica, cualquier Hamiltoniano que lo describa debe ser *invariante frente a rotaciones arbitrarias*

Tomemos como ejemplo el átomo de Hidrógeno es un sistema con *simetría esférica*. Según vimos

$$e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\theta/\hbar} H e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\theta/\hbar} = H \quad \Leftrightarrow \quad [J_i, H] = 0 \tag{25}$$

Sabemos que efectivamente esto se cumple y entonces J_i se conserva. Verifiquemos explícitamente

$$\langle J_i \rangle(t) = \langle \psi_0 | U^\dagger(t) J_i U(t) | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | J_i | \psi_0 \rangle = \langle J_i \rangle(0) \tag{26}$$

Otra de las consecuencias que traen las simetrías de un sistema es que, si las hay, necesariamente los niveles son *degenerados*

Esto sucede en general, pero el ejemplo del átomo de Hidrógeno tiene la particularidad de tener una simetría adicional a la simetría esférica, responsable de que la degeneración de los niveles sea aún mayor.

Dijimos que el sistema tiene simetría ante las rotaciones generadas por el momento angular

$$e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\theta/\hbar} H e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\theta/\hbar} = H \qquad \Leftrightarrow \qquad [J_i, H] = 0 \tag{27}$$

Pero además, el Hamiltoniano con $V(x) \sim \frac{1}{r}$, tiene un simetría adicional cuyo generador es

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2me^2}(\mathbf{L} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{L}) + \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad ; \qquad [K_i, H] = 0 \tag{28}$$

A partir de estas dos simetrías se puede derivar la degeneración n^2 de los niveles del átomo de Hidrógeno (ver ejs. 77, 78).

79 Considere un estado arbitrario $|\alpha\rangle$ de un sistema de espín 1/2, sobre el que se aplica la siguiente transformación

$$|\alpha\rangle_R = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} S_z\,\varphi\right)|\alpha\rangle \ .$$

(a) Calcular el valor de expectación de S_x en el estado $|\alpha\rangle_R$ en función de los valores de expectación de S_x y S_y en el estado $|\alpha\rangle$. El resultado mostrará una *rotación* de los valores de expectación. En clase vieron que, en general, un operador de la forma $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{J}\cdot\hat{e}_n\varphi\right)$ será un operador que implementará rotaciones de ángulo φ sobre el estado del sistema. Como vimos en el ejercicio 76, el generador de dichas rotaciones es la componente del momento angular en la dirección del eje $\hat{e}_n$ de rotación.

(b) Muestre que si $\varphi = 2\pi$ se satisface

$$|\alpha\rangle_R = -\,|\alpha\rangle \ .$$

Observe que no se obtiene el mismo estado debido a un factor de fase. ¿Puede observarse este efecto? Vea *Phys. Rev. Lett* **35**, 1053 (1975), o *Phys. Today*, Dic. 1980, pag. 24.

$$\langle S_i\rangle = \langle\alpha|\exp(i\varphi S_z/\hbar)\,S_i\,\exp(-i\varphi S_z/\hbar)|\alpha\rangle \tag{29}$$

Podemos usar $e^B A e^{-B} = A + [B,A] + \frac{1}{2!}[B,[B,A]] + \ldots$. Tomemos el caso $S_i = S_x$

$$\begin{aligned} B =& i\varphi S_z/\hbar \\ [B,A] =& (i\varphi/\hbar)\,(i\hbar)S_y \\ [B,[B,A]] =& -\,(i\varphi/\hbar)^2\,(i\hbar)^2 S_x \\ & \ldots \end{aligned}$$

$$U_z(\varphi)\, S_x\, U_z(\varphi)^\dagger = S_x - \varphi S_y - \frac{\varphi^2}{2!} S_x + \frac{\varphi^3}{3!} S_y + \ldots \tag{30}$$

$$= \cos(\varphi) S_x - \sin(\varphi) S_y \tag{31}$$

$$U_z(\varphi)\, S_y\, U_z(\varphi)^\dagger = \sin(\varphi) S_x + \cos(\varphi) S_y \tag{32}$$

Si tomamos el valor medio respecto al estado *inicial* $|\alpha\rangle$ y definimos $\langle S_i\rangle_0 \equiv \langle\alpha|S_i|\alpha\rangle$, tenemos

$$\begin{pmatrix} \langle S_x\rangle \\ \langle S_y\rangle \\ \langle S_z\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle S_x\rangle_0 \\ \langle S_y\rangle_0 \\ \langle S_z\rangle_0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Los valores medios rotan. Es decir, en este ejemplo vemos explícitamente que $U(\varphi)$ implementa una rotación alrededor del eje $\hat{z}$, generada por S_z.

Usando que cuando $A^2 = 1$ vale $e^{i\alpha A} = \cos(\alpha)1 + i\sin(\alpha)A$, tenemos

$$U(\varphi) = \cos(\varphi/2)1 - i\sin(\varphi/2)\sigma_z \tag{34}$$

$$U(2\pi) = -1 \tag{35}$$

$$U(2\pi)|\alpha\rangle = -|\alpha\rangle \tag{36}$$

Notar que el inciso a) es independiente de la representación, mientras que en el b) es importante que estamos en $j = 1/2$.

Cosas importantes

Algunas cosas importantes para recordar

- Las transformaciones son implementadas por un operador unitario o, en el caso de algunas transformaciones discretas, por un operador antiunitario
- Escribimos las transformaciones continuas como la exponencial de un operador hermítico (generador)
- Simetría continua $\Leftrightarrow$ carga conservada
- $P \longleftrightarrow$ traslaciones
- $H \longleftrightarrow$ evolución temporal
- $J \longleftrightarrow$ rotaciones
- La existencia de simetrías implica una degeneración de niveles en el sistema