Perturbaciones independientes del tiempo

Tengo un sistema que se resolver no degenerado

$$H_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle$$

y quiero resolver el sistema perturbado

$$(H_0 + \lambda V) |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \longrightarrow$$ soluciones del sistema con la perturbación

λV ↳ la perturbación

No va a ser de forma exacta, sino a orden bajo de $\lambda \ll 1$

Proponemos que

$$\begin{cases} E \equiv E(\lambda) = E_0 + E_1 \lambda + E_2 \lambda^2 + \dots \\ |\Psi\rangle \equiv |\Psi(\lambda)\rangle = |0\rangle + \lambda |1\rangle + \lambda^2 |2\rangle + \dots \end{cases}$$

Reemplazando en $(H_0 + \lambda V)|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ y pidiendo que valga para λ arbitrario

$$\boxed{\begin{aligned} E_n(\lambda) &= E_n^{(0)} + \lambda \langle n^{(0)}| V | n^{(0)}\rangle + \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{|\langle n^{(0)}| V | k^{(0)}\rangle|^2}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})} + O(\lambda^3) \\ |n(\lambda)\rangle &= |n^{(0)}\rangle + \lambda \sum_{k\neq n} \frac{\langle k^{(0)}| V | n^{(0)}\rangle}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})} |k^{(0)}\rangle + O(\lambda^2) \end{aligned}}$$

Soluciones aproximadas del sistema perturbado

caso degenerado

$\{|n_i^{(0)}\rangle\}$ $\quad i = 1, \dots, g_n$ soluciones de H_0 con energía $E_n^{(0)}$

↳ degeneración

$$H_0 = \begin{bmatrix} E_1^{(0)} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & E_1^{(0)} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & E_2^{(0)} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & E_3^{(0)} & \\ & & & & E_3^{(0)} \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad \lambda V = \lambda \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & \dots \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & \dots \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & \dots \\ V_{41} & V_{42} & V_{43} & V_{44} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ misma base (autoestados de H_0)

para los niveles no degenerados, es lo mismo de siempre solo que hay que sumar sobre todos los elementos del subespacio con esa energía

para el nivel $E_n^{(0)}$ (con degeneración)

$$H_0^{(n)} = \begin{bmatrix} E_n^{(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & E_n^{(0)} \end{bmatrix} \qquad g_n \times g_n$$

$$V^{(n)} = \begin{bmatrix} \cdot & & \\ & \langle n_i^{(0)} | V | n_j^{(0)} \rangle & \\ & & \end{bmatrix} \qquad g_n \times g_n$$

$\Rightarrow$ los estados $|v_i^{(n)}\rangle$ tales que

1) $V^{(n)} |v_i^{(n)}\rangle = v_i^{(n)} |v_i^{(n)}\rangle$ o sea hay que diagonalizar la submatriz $V^{(n)}$

los $|v_i^{(n)}\rangle$ van a diagonalizar $V^{(n)}$ y además también son autoestados de H_0 porque van a ser

$$|v_i^{(n)}\rangle = \sum_{j=1}^{g_n} a_j \, |n_j^{(0)}\rangle \qquad H_0 |v_i^{(n)}\rangle = E_n^{(0)} |v_i^{(n)}\rangle$$

con energía $E_n^{(0)}$ de H_0

A orden cero los estados solución del sistema perturbado son

$$|n_i\rangle = |v_i^{(n)}\rangle + O(\lambda)$$

y la energía autovalores de la submatriz $V^{(n)}$

$$E_{ni} = E_n^{(0)} + \lambda \, v_i^{(n)} + O(\lambda^2)$$

comentario

si $v_i^{(n)} \neq v_j^{(n)}$ $\forall \, i \neq j$ con $i = 1, \dots, g_n$ y $j = 1, \dots, g_n$

$\Rightarrow$ la perturbación rompe la degeneración de H_0 completamente

$$H_0^{(n)} = \begin{array}{c} |n_1^{(0)}\rangle \; |n_2^{(0)}\rangle \; \cdots \\ \begin{bmatrix} E_n^{(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & E_n^{(0)} \end{bmatrix} \end{array} = E_n^{(0)} \, \mathbb{1}$$

$E_n^{(0)}$

87 La matriz hamiltoniana de cierto sistema de dos niveles puede escribirse como

$$H = \begin{pmatrix} E_1^0 & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^0 \end{pmatrix}.$$

Claramente los autovectores de la energía del problema no perturbado ($\lambda = 0$) son

$$\phi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Resuelva este problema exactamente, encuentre los autovectores y autovalores de la energía.

$$H = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_2^{(0)} \end{pmatrix} \qquad |1^{(0)}\rangle \equiv |\phi_1^{(0)}\rangle \qquad |2^{(0)}\rangle \equiv |\phi_2^{(0)}\rangle$$

opción 1

$\det(\alpha \mathbb{1} - H) = 0$ y buscar autovectores del sistema

opción 2

$$H = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix} + \lambda\Delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \left(\frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2}\right) \cdot \mathbb{1} + \frac{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})}{2}\sigma_z + \lambda\Delta\sigma_x$$

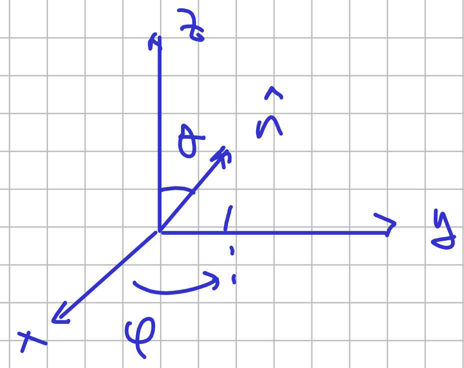
$$\left(\frac{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}{2}\right)\sigma_z + \lambda\Delta\sigma_x = (\text{constante}) \cdot \hat{n}\cdot\vec{\sigma}$$

$$= \sqrt{\frac{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}{4} + (\lambda\Delta)^2} \cdot \underbrace{\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$$

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}{4} + (\lambda\Delta)^2}} \cdot \left(\lambda\Delta, 0, \frac{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}{2}\right)$$

$$E_{1,2} = \underbrace{\frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2}}_{\text{parte prop Id}} \pm \underbrace{\sqrt{\lambda^2\Delta^2 + \frac{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}{4}}}_{\text{parte de } \sqrt{} \cdot \underbrace{\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}_{\pm 1}}$$

$\hat{n} = (n_x, 0, n_z)$



$\varphi = 0$

$\tan\theta = \dfrac{n_x}{n_z} = \dfrac{2\lambda\Delta}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}$

En genérico eran

$$|+,\hat{n}\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|-\rangle$$

$$|-,\hat{n}\rangle = -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|-\rangle$$

(a chequear)

Entonces los autoestados de H

$$|1\rangle = \cos(\theta/2)\,|1^{(0)}\rangle + \operatorname{sen}(\theta/2)\,|2^{(0)}\rangle \qquad E_1 = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} + \sqrt{\frac{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}{4} + (\lambda\Delta)^2}$$

$$|2\rangle = -\operatorname{sen}(\theta/2)\,|1^{(0)}\rangle + \cos(\theta/2)\,|2^{(0)}\rangle \qquad E_2 = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} - \sqrt{\frac{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}{4} + (\lambda\Delta)^2}$$

θ tq $\tan(\theta) = \dfrac{2\lambda\Delta}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}$

(b) Asumiendo que $\lambda|\Delta| \ll |E_1^0 - E_2^0|$, resuelva el mismo problema usando la teoría de perturbaciones. Halle la corrección de primer orden en los autovectores y de segundo orden en los niveles de energía. Compare los resultados con los obtenidos en (a).

$$\boxed{\begin{aligned} E_n(\lambda) &= E_n^{(0)} + \lambda \langle n^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle + \lambda^2 \sum_{k\neq n} \frac{|\langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle|^2}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})} + O(\lambda^3) \\ |n(\lambda)\rangle &= |n^{(0)}\rangle + \lambda \sum_{k\neq n} \frac{\langle k^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})} |k^{(0)}\rangle + O(\lambda^2) \end{aligned}}$$

Soluciones aproximadas del sistema perturbado

$$H = \underbrace{\begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix}}_{H_0} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}}_{V} = H_0 + \lambda V$$

$$\begin{array}{c} \\ \langle 1^{(0)}| \\ \langle 2^{(0)}| \end{array} \begin{array}{c} |1^{(0)}\rangle \quad |2^{(0)}\rangle \\ \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \end{array}$$

$n=1 \rightarrow$

$$|1\rangle = |1^{(0)}\rangle + \lambda \frac{\langle 2^{(0)}|V|1^{(0)}\rangle}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} |2^{(0)}\rangle + O(\lambda^2)$$

$$|1\rangle = |1^{(0)}\rangle + \frac{\lambda \Delta}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} |2^{(0)}\rangle$$

$$E_1 = E_1^{(0)} + \lambda \langle 1^{(0)}|V|1^{(0)}\rangle + \lambda^2 \frac{|\langle 1^{(0)}|V|2^{(0)}\rangle|^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} + O(\lambda^3)$$

$$E_1 = E_1^{(0)} + \lambda \cdot 0 + \frac{\lambda^2 \Delta^2}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} + O(\lambda^3)$$

para $n=2$

$$|2\rangle = |2^{(0)}\rangle + \frac{\lambda \Delta}{(E_2^{(0)} - E_1^{(0)})} |1^{(0)}\rangle + O(\lambda^2)$$

$$E_2 = E_2^{(0)} + \frac{\lambda^2 \Delta^2}{E_2^{(0)} - E_1^{(0)}} + O(\lambda^3)$$

comparamos con a) $\quad \lambda\Delta \ll |E_1^{(0)} - E_2^{(0)}|$

$$\frac{\lambda \Delta}{|E_1^{(0)} - E_2^{(0)}|} \ll 1$$

soluciones de a)

$$|1\rangle = \cos(\theta/2)|1^{(0)}\rangle + \operatorname{sen}(\theta/2)|2^{(0)}\rangle$$

$$|2\rangle = -\operatorname{sen}(\theta/2)|1^{(0)}\rangle + \cos(\theta/2)|2^{(0)}\rangle$$

$$E_1 = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} + \sqrt{\frac{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}{4} + (\lambda\Delta)^2}$$

$$E_2 = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} - \sqrt{\frac{(E_1^{(0)} - E_2^{(0)})^2}{4} + (\lambda\Delta)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{2\lambda\Delta}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}}$$

desarrollemos las sol del a)

si $\frac{\lambda\Delta}{|E_1^{(0)}-E_2^{(0)}|} << 1 \Rightarrow |\tan\theta| << 1 \iff |\theta| << 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan\theta \simeq \theta$; $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$

Entonces desarrollando

$$|1\rangle \simeq |1^{(0)}\rangle + \frac{\theta}{2}|2^{(0)}\rangle \overset{\tan\theta\simeq\theta}{\simeq} |1^{(0)}\rangle + \frac{\lambda\Delta}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}}|2^{(0)}\rangle + \underbrace{O(\theta^2)}_{\lambda^2}$$

$$|2\rangle \simeq |2^{(0)}\rangle - \frac{\lambda\Delta}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}}|1^{(0)}\rangle + O(\lambda^2)$$

Es lo mismo que con perturbaciones (hasta este orden)

$$E_1 = \frac{E_1^{(0)}+E_2^{(0)}}{2} + \sqrt{\frac{(E_1^{(0)}-E_2^{(0)})^2}{4}+(\lambda\Delta)^2} = \frac{E_1^{(0)}+E_2^{(0)}}{2} + \frac{|E_1^{(0)}-E_2^{(0)}|}{2}\sqrt{1+\underbrace{\frac{4\lambda^2\Delta^2}{(E_1^{(0)}-E_2^{(0)})^2}}_{<<1}}$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$$

$$E_1 \simeq \frac{E_1^{(0)}+E_2^{(0)}}{2} + \frac{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}}{2}\left(1+\frac{2\lambda^2\Delta^2}{(E_1^{(0)}-E_2^{(0)})^2}+O(\lambda^3)\right)$$

$$E_1 \simeq E_1^{(0)} + \frac{\lambda^2\Delta^2}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}} + O(\lambda^3)$$ que es lo mismo que con perturbaciones

$E_1^{(0)} > E_2^{(0)}$

$$E_2 \simeq E_2^{(0)} - \frac{\lambda^2\Delta^2}{E_1^{(0)}-E_2^{(0)}} + O(\lambda^3)$$

(c) Suponga ahora que los niveles de energía no perturbados están casi degenerados ($|E_1^0 - E_2^0| \ll \lambda|\Delta|$). Muestre que los resultados obtenidos en (a) se parecen mucho a los que obtendría al aplicar la teoría de perturbaciones para el caso degenerado ($E_1^0 = E_2^0$).

si $|E_1^{(0)} - E_2^{(0)}| << \lambda |\Delta|$

(los resultados de a)

$$|1\rangle = \cos(\theta/2)|1^{(0)}\rangle + \operatorname{sen}(\theta/2)|2^{(0)}\rangle \qquad E_1 = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} + \sqrt{\frac{(E_1^{(0)}-E_2^{(0)})^2}{4} + (\lambda\Delta)^2}$$

$$|2\rangle = -\operatorname{sen}(\theta/2)|1^{(0)}\rangle + \cos(\theta/2)|2^{(0)}\rangle \qquad E_2 = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} - \sqrt{\frac{(E_1^{(0)}-E_2^{(0)})^2}{4} + (\lambda\Delta)^2}$$

θ tq $\tan(\theta) = \dfrac{2\lambda\Delta}{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}} >> 1 \quad (\longrightarrow \infty)$

si $\tan\theta \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow \theta \longrightarrow \pm\dfrac{\pi}{2} \quad \left(+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$|1\rangle \simeq \cos\left(\frac{\theta}{4}\right)|1^{(0)}\rangle + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{4}\right)|2^{(0)}\rangle = \frac{|1^{(0)}\rangle + |2^{(0)}\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|2\rangle \simeq \frac{|1^{(0)}\rangle - |2^{(0)}\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$E_1 = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} + \sqrt{\left(\frac{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}{2}\right)^2 + (\lambda\Delta)^2}$$

$$E_1 = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} + |\lambda\Delta| \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{E_1^{(0)} - E_2^{(0)}}{2\lambda\Delta}\right)^2}_{<<1}} \simeq \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} + |\lambda\Delta|$$

$$E_2 = \frac{E_1^{(0)} + E_2^{(0)}}{2} - |\lambda\Delta|$$

Hasta acá las soluciones exactas en el límite en el que $\lambda|\Delta| >> |E_1^{(0)} - E_2^{(0)}|$

Ahora lo que nos queda es resolver el problema con perturbaciones (a 1° orden en energía y orden cero en estados) si $E_1^{(0)} = E_2^{(0)} = E^{(0)}$

$\{|1^{(0)}\rangle\ |2^{(0)}\rangle\}$ base del subespacio de autoestados con energía $E^{(0)}$

$$H = \underbrace{\begin{bmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_1^{(0)} \end{bmatrix}}_{H_0} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}}_{V}$$

$$H_0^{(n)} = \begin{bmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_1^{(0)} \end{bmatrix} \qquad V^{(n)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} |1^{(0)}\rangle & |2^{(0)}\rangle \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} n = 1 \\ g_1 = 2 \end{array}$$

(todo esto en la base de H_0)

Había que diagonalizar $V^{(n)}$ $\qquad |1^{(0)}\rangle \longrightarrow |+\rangle \quad |2^{(0)}\rangle \to |-\rangle$

$$\lambda V^{(n)} = \lambda \Delta \sigma_x \longrightarrow \quad |\Delta\rangle = \frac{|1^{(0)}\rangle + |2^{(0)}\rangle}{\sqrt{2}} \to \text{autovalor } +\Delta$$

$$|-\Delta\rangle = \frac{|1^{(0)}\rangle - |2^{(0)}\rangle}{\sqrt{2}} \longrightarrow \text{autovalor } -\Delta$$

y entonces a 1° orden en energía

$$E_1 = E_1^{(0)} + \lambda \cdot v_1^{(1)} + O(\lambda^2) = E_1^{(0)} + \lambda\Delta + O(\lambda^2)$$

$$E_2 = E_1^{(0)} + \lambda\, v_2^{(1)} + O(\lambda^2) = E_1^{(0)} - \lambda\Delta + O(\lambda^2)$$

a orden cero en autoestados

$$|1\rangle = |v_1^{(1)}\rangle = |\Delta\rangle = \frac{|1^{(0)}\rangle + |2^{(0)}\rangle}{\sqrt{2}}$$

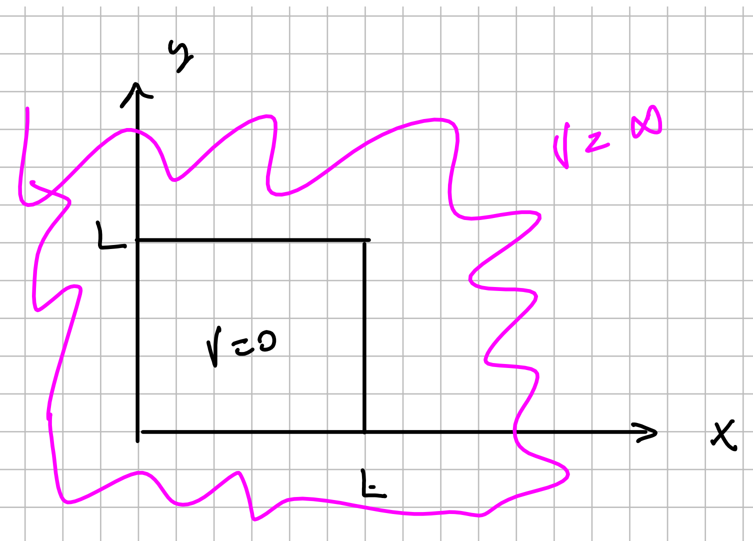
$$|2\rangle = |v_2^{(1)}\rangle = |-\Delta\rangle = \frac{|1^{(0)}\rangle - |2^{(0)}\rangle}{\sqrt{2}}$$

Mismo resultado que el límite con $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

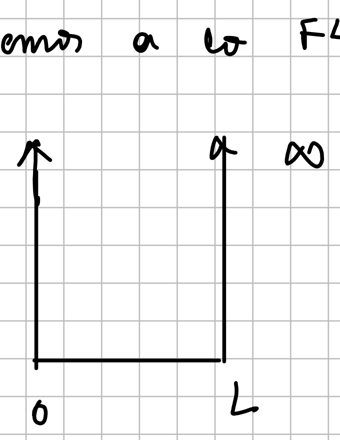
88 Un pozo cuántico es un pozo de potencial que confina a partículas a moverse en dos dimensiones. Tales pozos pueden construirse con muticapas de semiconductores. El confinamiento en las dos direcciones restantes puede diseñarse con bastante libertad para conseguir distintas estucturas de niveles energéticos. Este tipo de técnicas se utiliza para hacer LEDs y diodos láser de distintos colores. Consideremos el caso que el potencial en las dos direcciones restantes es de la forma

$$V = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le x \le L, 0 \le y \le L \\ \infty & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Calcule las autofunciones de la energía para el estado fundamental y el primer excitado.



Lo resolvemos a lo F4



$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + V(x,y) \right] \Psi(x,y) = E\,\Psi(x,y)$$

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>L \text{ ó } x<0 \text{ ó } y>L \text{ ó } y<0 \\ \Psi(x,y) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi(x,y) + 0 = E\,\Psi(x,y)$$

$$\Psi(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)\right] Y(y) - \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y)\right] X(x) \right] = E\,X(x)\,Y(y)$$

$$\underbrace{\frac{\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)\right]}{X(x)}}_{E_x} - \underbrace{\frac{\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y)\right]}{Y(y)}}_{E_y} = E \qquad E_x + E_y = E$$

ahora es pozo 1D

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) = E_x\,X(x) \qquad \text{idem para } Y(y),\ E_y$$

tan sol con C.C $\quad \Psi(x,0) = \Psi(x,L) = \Psi(0,y) = \Psi(L,y) = 0$

$$X(x) = A_x \,\text{sen}\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \qquad Y(y) = A_y\,\text{sen}\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right)$$

con $n_x, n_y = 1, 2, \ldots$

$$\psi_{n_x n_y}(x,y) = \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right)$$
normalizada

$$E_x = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_x^2 \qquad E_y = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_y^2$$

$$E_{n_x n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2)$$

El fundamental $n_x = 1$, $n_y = 1$

$$\psi_{11}(x,y) = \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{L}\right) \qquad E_1^{(0)} \equiv E_{11} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2}$$

1° excitado $n_x = 2$ $n_y = 1$; $n_x = 1$ $n_y = 2$ } tiene degeneración $g_2 = 2$

$$\boxed{\langle x, y | n_x, n_y \rangle = \psi_{n_x n_y}(x,y)} \qquad E_{12} = E_{21} = E_2^{(0)} = 5\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{5}{2} E_1^{(0)}$$

$|E_1^{(0)}\rangle \equiv |1\,1\rangle \longrightarrow g_1 = 1 \longrightarrow E_1^{(0)}$

$|E_2^{(0)}; 1\rangle \equiv |2,1\rangle$ $(n_x = 2, n_y = 1)$

$|E_2^{(0)}; 2\rangle \equiv |1,2\rangle$ $(n_x = 1, n_y = 2)$ $\longrightarrow g_2 = 2 \longrightarrow E_2^{(0)}$

$$H_0 = \begin{array}{c|ccc} & |E_1^{(0)}\rangle & |E_2^{(0)};1\rangle & |E_2^{(0)};2\rangle \\ \hline \langle E_1^{(0)}| & & & \\ \langle E_2^{(0)};1| & & & \\ \langle E_2^{(0)};2| & & & \end{array} \left(\begin{array}{c|cc} E_1^{(0)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_2^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & E_2^{(0)} \end{array}\right)$$

· si agregamos una perturbación independiente de tiempo

$$V_1 = \begin{cases} \lambda xy & \text{para } 0 \le x \le L, 0 \le y \le L \\ 0 & \text{en otro caso ,} \end{cases}$$

calcule las autofunciones de la energía a orden cero, y los desplazamientos de energía a primer orden para el estado fundamental y el primer excitado.

$$H_0 + \lambda V = \begin{bmatrix} E_1^{(0)} & & \\ & E_2^{(0)} & \\ & & E_2^{(0)} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix}$$

en la base de $\{|E_1^{(0)}\rangle, |E_2^{(0)};1\rangle, |E_2^{(0)},2\rangle\}$

•) para el nivel con degeneración 1

$|1\rangle = \underbrace{|E_1^{(0)}\rangle} + O(\lambda)$ $\qquad \tilde{\Psi}_1(x,y) = \langle x,y|1\rangle = \Psi_{11}(x,y)$

la solución con la perturbación

$$E_1 = E_1^{(0)} + \lambda V_{11} + O(\lambda^2)$$

•) para el nivel con degeneración 2, $E_2^{(0)}$ $\quad \{|E_2^{(0)},1\rangle, |E_2^{(0)},2\rangle\}$

$$H_0 + \lambda V = \begin{bmatrix} E_1^{(0)} & & \\ & E_2^{(0)} & \\ & & E_2^{(0)} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix}$$

$$V^{(2)} = \begin{array}{cc} |E_2^{(0)},1\rangle & |E_2^{(0)},2\rangle \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} V_{22} & V_{23} \\ V_{32} & V_{33} \end{bmatrix}$$

— los estados que diagonalizan $V^{(2)}$ van a ser los estados que buscamos

Calculemos los elementos de matriz

$$V_{11} = \langle E_1^{(0)} | V | E_1^{(0)} \rangle = \langle n_x=1, n_y=1 | V | n_x=1, n_y=1\rangle$$

$$V_{11} = \iint dx\,dy \; \Psi_{11}^*(x,y) \cdot xy \; \Psi_{11}(x,y)$$

$$V_{11} = \int_0^L\!\!\int_0^L dx\,dy \left(\frac{2}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{L}\right)^2 \cdot xy = \frac{L^2}{4}$$

$$V_{22} = \langle E_2^{(0)},1 | V | E_2^{(0)},2\rangle = \langle n_x=2, n_y=1 | V | n_x=2, n_y=1\rangle$$

$$V_{22} = \iint dx\,dy \left(\frac{2}{L}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{\pi y}{L}\right)^2 \cdot x\,y = \frac{L^2}{4}$$

$$V_{33} = \langle E_2^{(0)}, 2 | V | E_2^{(0)}, 2\rangle = \langle n_x=1, n_y=2 | V | n_x=1, n_y=2\rangle = V_{22}$$

$$V_{33} = \frac{L^2}{4}$$

$$V_{23} = V_{32} = \langle E_2^{(0)}, 1 | V | E_2^{(0)}, 2\rangle =$$

$$V_{23} = V_{32} = \int_0^L\!\!\int_0^L dx\,dy \left(\frac{2}{L}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{x\pi}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{2x\pi}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{2y\pi}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{y\pi}{L}\right)$$

$$V_{23} = V_{32} = \frac{256}{81}\frac{L^2}{\pi^2} \equiv \Delta \cdot \frac{L^2}{4}$$

$$\underset{\text{submatriz}}{V^{(2)}} = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} & \frac{L^2}{4}\cdot\Delta \\ \frac{L^2}{4}\Delta & \frac{L^2}{4} \end{bmatrix} = \frac{L^2}{4}\left[\mathbb{1} + \Delta\, \sigma_x \right]$$

autovalores ± 1

$$\{ |E_2^{(0)}, 1\rangle, |E_2^{(0)}, 2\rangle \} = \{ |n_x=2, n_y=1\rangle, |n_x=1, n_y=2\rangle \}$$

los autoestados de $V^{(2)}$

$$|\Delta\rangle = \frac{|E_2^{(0)}, 1\rangle + |E_2^{(0)}, 2\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{con autovalor } \frac{L^2}{4} + \Delta$$

$$|-\Delta\rangle = \frac{|E_2^{(0)}, 1\rangle - |E_2^{(0)}, 2\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{con autovalor } \frac{L^2}{4} - \Delta$$

ya está

Las soluciones aproximadas del sistema con la perturbación a orden 0 en estados, orden 1 en energía

$$|1\rangle = |E_1^{(0)}\rangle = |n_x=1, n_y=1\rangle \longrightarrow \tilde{\varphi}_1(x,y) = \varphi_{11}(x,y)$$

$$|2\rangle = |\Delta\rangle = \frac{|E_2^{(0)}, 1\rangle + |E_2^{(0)}, 2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|n_x=2, n_y=1\rangle + |n_x=1, n_y=2\rangle}{\sqrt{2}}$$

1° autoestado de $V^{(2)}$

$$\longrightarrow \tilde{\varphi}_2(x,y) = \frac{\varphi_{21}(x,y) + \varphi_{12}(x,y)}{\sqrt{2}}$$

$$|3\rangle = |-\Delta\rangle = \frac{|E_2^{(0)}, 1\rangle - |E_2^{(0)}, 2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|n_x=2, n_y=1\rangle - |n_x=1, n_y=2\rangle}{\sqrt{2}}$$

2° autoestado de $V^{(2)}$

$$\longrightarrow \tilde{\varphi}_3(x,y) = \frac{\varphi_{21}(x,y) - \varphi_{12}(x,y)}{\sqrt{2}}$$

Las energías a 1° orden

$$E_1 = E_1^{(0)} + \lambda V_{11} = E_1^{(0)} + \frac{\lambda L^2}{4}$$

$$E_2 = E_2^{(0)} + \lambda \underbrace{v_1^{(2)}}_{\text{1° autovalor de } V^{(2)}} = \frac{5}{2} E_1^{(0)} + \lambda \frac{L^2}{4}(1+\Delta)$$

$$E_3 = E_2^{(0)} + \lambda \underbrace{v_2^{(2)}}_{\text{2° autovalor de } V^{(2)}} = \frac{5}{2} E_1^{(0)} + \frac{\lambda L^2}{4}(1-\Delta)$$