Física Teórica 2 - Práctica

Partículas idénticas.

Partículas idénticas

Temas a ver:

- 2 partículas idénticas
- N partículas idénticas
- Ejercicio 103
- Ejercicios 105-108

Partículas idénticas

Comparten las mismas propiedades intrínsecas

- Masa
- Carga
- Spin
- Carga de color
- Isospin
- etc

Pueden ser elementales como los electrones, fotones, muones o ser compuestas como los neutrones, proptones o átomos.

Partículas idénticas

El espacio de Hilbert de dos partículas idénticas es de la forma $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

Allí definimos el **operador permutación** de dos partículas sobre elementos de la base producto tensorial como

$$P_{12}|\alpha, \beta\rangle = |\beta, \alpha\rangle. \tag{1}$$

Partículas idénticas

El espacio de Hilbert de dos partículas idénticas es de la forma $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

Allí definimos el **operador permutación** de dos partículas sobre elementos de la base producto tensorial como

$$P_{12}|\alpha, \beta\rangle = |\beta, \alpha\rangle. \tag{1}$$

Podemos ver que satisface las siguientes propiedades

$$P_{12}^2|\alpha, \beta\rangle = P_{12}|\beta, \alpha\rangle = |\alpha, \beta\rangle \tag{2}$$

$$P_{12}^2 = \mathbb{I} \tag{3}$$

$$P_{12}^{-1} = P_{12} = P_{12}^\dagger. \tag{4}$$

Como es hermítco sus autovalores son reales y como $P^2 = \mathbb{I}$ sus autovalores resultan ser $+1$ y -1.

Partículas idénticas

Los estados $|\psi_{\mathsf{S}}\rangle$ que satisfacen

$$P|\psi_{\mathsf{S}}\rangle = |\psi_{\mathsf{S}}\rangle \tag{5}$$

se denominan **simétricos**.

Los estados $|\psi_{\mathsf{S}}\rangle$ que satisfacen

$$P|\psi_{\mathsf{S}}\rangle = |\psi_{\mathsf{S}}\rangle \tag{5}$$

se denominan **simétricos**.

Los estados $|\psi_{\mathsf{A}}\rangle$ que satisfacen

$$P|\psi_{\mathsf{A}}\rangle = -|\psi_{\mathsf{A}}\rangle \tag{6}$$

se denominan **anti-simétricos**.

Partículas idénticas

Los estados $|\psi_{\mathsf{S}}\rangle$ que satisfacen

$$P|\psi_{\mathsf{S}}\rangle = |\psi_{\mathsf{S}}\rangle \tag{5}$$

se denominan **simétricos**.

Los estados $|\psi_{\mathsf{A}}\rangle$ que satisfacen

$$P|\psi_{\mathsf{A}}\rangle = -|\psi_{\mathsf{A}}\rangle \tag{6}$$

se denominan **anti-simétricos**.

Si las partículas son idénticas entonces el estado de partículas intercambiadas $P_{12}|\psi\rangle$ será indistinguible del estado $|\psi\rangle$.

Los estados $|\psi_{\mathsf{S}}\rangle$ que satisfacen

$$P|\psi_{\mathsf{S}}\rangle = |\psi_{\mathsf{S}}\rangle \tag{5}$$

se denominan **simétricos**.

Los estados $|\psi_{\mathsf{A}}\rangle$ que satisfacen

$$P|\psi_{\mathsf{A}}\rangle = -|\psi_{\mathsf{A}}\rangle \tag{6}$$

se denominan **anti-simétricos**.

Si las partículas son idénticas entonces el estado de partículas intercambiadas $P_{12}|\psi\rangle$ será indistinguible del estado $|\psi\rangle$.Eso significa que para todo obserbable A debemos tener que

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|P_{12}^{\dagger}AP_{12}|\psi\rangle \implies P_{12}^{\dagger}AP_{12} = A, \tag{7}$$

es decir, que todos los obserbables físicos tienen que ser invariantes ante permutación. Por ejemplo, el espín total $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Postulado de simetrización

a) Partículas cuyo espín es un entero múltiplo de $\hbar$ solo puede estar en un estado simétrico. Estas partículas se llaman bosones.

b) Partículas cuyo espín es un múltiplo semi-entero de $\hbar$ solo puede estar en un estado anti-simétrico. Estas partículas se llaman fermiones.

c) No existen estados parcialmente simétricos.

Es fundamental entonces entender cómo construirnos estados con una simetría dada.

Operador simetrizador

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{I} + P_{12} \right) \tag{8}$$

Operador simetrizador

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{I} + P_{12} \right) \tag{8}$$

Operador anti-simetrizador

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbb{I} - P_{12} \right) \tag{9}$$

Partículas idénticas

Operador simetrizador

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{I} + P_{12}\right) \tag{8}$$

Operador anti-simetrizador

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{I} - P_{12}\right) \tag{9}$$

Veamos que efectivamente si aplicamos estos operadores a un estado arbitrario el resultado tiene la simetría buscada. Sea $|\phi\rangle = S|\psi\rangle$

$$P_{12}|\phi\rangle = P_{12}S|\psi\rangle = P_{12}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{I} + P_{12}\right)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(P_{12} + P_{12}^2\right)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(P_{12} + \mathbb{I}\right)|\psi\rangle \tag{10}$$

$$P_{12}|\phi\rangle = |\phi\rangle. \tag{11}$$

Además tenemos que

$$\mathbb{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(S + A\right) \implies |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(S|\psi\rangle + A|\psi\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_{\mathsf{S}}\rangle + |\psi_{\mathsf{A}}\rangle\right). \tag{12}$$

Todo estado de dos partículas es suma de un estado simétrico y otro anti-simétrico

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathsf{S}} \oplus \mathcal{H}_{\mathsf{A}}. \tag{13}$$

Ejercicio 103 Construya los estados posibles de varias partículas en cada uno de los siguientes casos.

a) Dos bosones de espín 1.

Ejercicio 103 Construya los estados posibles de varias partículas en cada uno de los siguientes casos.

a) Dos bosones de espín 1.

La base del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de uno de estos espines está dada por

$$\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}. \tag{14}$$

Ejercicio 103 Construya los estados posibles de varias partículas en cada uno de los siguientes casos.

a) Dos bosones de espín 1.

La base del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de uno de estos espines está dada por

$$\{|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}. \tag{14}$$

La base tensorial del sistema compuesto $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ es entonces

$$\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle, |0,1\rangle, |0,0\rangle, |0,-1\rangle, |-1,1\rangle, |-1,0\rangle, |-1,-1\rangle\} \tag{15}$$

Como las partículas son bosones buscamos una base de estados simétricos.

Partículas idénticas

Los estados

$$|1\rangle = |1,1\rangle, \quad |2\rangle = |00\rangle, \quad |3\rangle = |-1,-1\rangle \tag{16}$$

ya son simétricos. Para obtener los otros aplicamos el operador simetrizador a la base

$$|4\rangle = S|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,1\rangle\right) = S|0,1\rangle \tag{17}$$

Los estados

$$|1\rangle = |1,1\rangle, \quad |2\rangle = |00\rangle, \quad |3\rangle = |-1,-1\rangle \tag{16}$$

ya son simétricos. Para obtener los otros aplicamos el operador simetrizador a la base

$$|4\rangle = S|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle + |0,1\rangle\right) = S|0,1\rangle \tag{17}$$

$$|5\rangle = S|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,-1\rangle + |-1,1\rangle\right) = S|-1,1\rangle \tag{18}$$

$$|6\rangle = S|-1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1,0\rangle + |0,-1\rangle\right) = S|0,1\rangle. \tag{19}$$

Así tenemos una nueva base de estados posibles

$$\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle, |6\rangle\}. \tag{20}$$

N partículas idénticas

Para entender sistemas con más de dos partículas debemos repasar algunos conceptos previos. Definimos una **permutación** σ como una función

$$\sigma : [1, 2, ..., N] \to [1, 2, ..., N] \tag{21}$$

biyectiva.

N partículas idénticas

Para entender sistemas con más de dos partículas debemos repasar algunos conceptos previos. Definimos una **permutación** σ como una función

$$\sigma : [1, 2, ..., N] \to [1, 2, ..., N] \tag{21}$$

biyectiva.Por ejemplo, para $N = 3$

$$(1, 2, 3) \to (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = (3, 2, 1). \tag{22}$$

Si la permutación se puede expresar como composición de p transposiciones (permutación de solo 2 elementos) entonces se define su signo como

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^p. \tag{23}$$

N partículas idénticas

Para entender sistemas con más de dos partículas debemos repasar algunos conceptos previos. Definimos una **permutación** σ como una función

$$\sigma : [1, 2, ..., N] \rightarrow [1, 2, ..., N] \tag{21}$$

biyectiva.Por ejemplo, para $N = 3$

$$(1, 2, 3) \rightarrow (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = (3, 2, 1). \tag{22}$$

Si la permutación se puede expresar como composición de p transposiciones (permutación de solo 2 elementos) entonces se define su signo como

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^p. \tag{23}$$

Dada una permutación σ definimos el operador de permutación sobre un estado de N partículas como

$$P_\sigma|1, 2, .., N\rangle = |\sigma(1), \sigma(2), .., \sigma(N)\rangle. \tag{24}$$

Los postulados se mantienen, es decir, el estado $|\psi_{\mathsf{S}}\rangle$ de un sistema de bosones de ser simétrico ante toda permutación de dos partículas

$$P_{ij}|\psi_{\mathsf{S}}\rangle = |\psi_{\mathsf{S}}\rangle \tag{25}$$

y un sistema de fermiones debe ser anti-simétrico

$$P_{ij}|\psi_{\mathsf{A}}\rangle = -|\psi_{\mathsf{A}}\rangle. \tag{26}$$

Por analogía con el caso anterior podemos definir el operador simetrizador como

$$S = \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{\sigma \text{ perm.}} P_\sigma \tag{27}$$

siendo C el número de estados que sumamos.

Por analogía con el caso anterior podemos definir el operador simetrizador como

$$S = \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{\sigma \text{ perm.}} P_\sigma \tag{27}$$

siendo C el número de estados que sumamos.Si tenemos N partículas y M estados bosónicos, los estados posibles son tantos como formas de distribuir N partículas en M cajitas: $\frac{(N+M-1)!}{N!(M-1)!}$.

Por analogía con el caso anterior podemos definir el operador simetrizador como

$$S = \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{\sigma \text{ perm.}} P_\sigma \tag{27}$$

siendo C el número de estados que sumamos.Si tenemos N partículas y M estados bosónicos, los estados posibles son tantos como formas de distribuir N partículas en M cajitas: $\frac{(N+M-1)!}{N!(M-1)!}$.

El operador anti-simetrizador es

$$A = \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{\sigma \text{ perm.}} \operatorname{sgn}(\sigma) P_\sigma. \tag{28}$$

Partículas idénticas

La acción de este operador sobre un estado se puede calcular como el **determinante de slater**

$$A(|a\rangle_1|b\rangle_2|c\rangle_3)\sqrt{C} = \begin{vmatrix} |a\rangle_1 & |a\rangle_2 & |a\rangle_3 \\ |b\rangle_1 & |b\rangle_2 & |b\rangle_3 \\ |c\rangle_1 & |c\rangle_2 & |c\rangle_3 \end{vmatrix} \tag{29}$$

$$= |a\rangle_1\left(|b\rangle_2|c\rangle_3 - |b\rangle_3|c\rangle_2\right) - |a\rangle_2\left(|b\rangle_1|c\rangle_3 - |b\rangle_3|c\rangle_1\right) + |a\rangle_3\left(|b\rangle_1|c\rangle_2 - |b\rangle_2|c\rangle_1\right) \tag{30}$$

$$= |a\rangle_1|b\rangle_2|c\rangle_3 - |a\rangle_1|c\rangle_2|b\rangle_3 - |b\rangle_1|a\rangle_2|c\rangle_3 + |c\rangle_1|a\rangle_2|b\rangle_3 + |b\rangle_1|c\rangle_2|a\rangle_3 - |c\rangle_1|b\rangle_2|a\rangle_3 \tag{31}$$

Permutaciones cíclicas tienen signo $+$ y anti-cíclicas $-$.

La acción de este operador sobre un estado se puede calcular como el **determinante de slater**

$$A(|a\rangle_1|b\rangle_2|c\rangle_3)\sqrt{C} = \begin{vmatrix} |a\rangle_1 & |a\rangle_2 & |a\rangle_3 \\ |b\rangle_1 & |b\rangle_2 & |b\rangle_3 \\ |c\rangle_1 & |c\rangle_2 & |c\rangle_3 \end{vmatrix} \tag{29}$$

$$= |a\rangle_1 \left(|b\rangle_2|c\rangle_3 - |b\rangle_3|c\rangle_2\right) - |a\rangle_2 \left(|b\rangle_1|c\rangle_3 - |b\rangle_3|c\rangle_1\right) + |a\rangle_3 \left(|b\rangle_1|c\rangle_2 - |b\rangle_2|c\rangle_1\right) \tag{30}$$

$$= |a\rangle_1|b\rangle_2|c\rangle_3 - |a\rangle_1|c\rangle_2|b\rangle_3 - |b\rangle_1|a\rangle_2|c\rangle_3 + |c\rangle_1|a\rangle_2|b\rangle_3 + |b\rangle_1|c\rangle_2|a\rangle_3 - |c\rangle_1|b\rangle_2|a\rangle_3 \tag{31}$$

Permutaciones cíclicas tienen signo $+$ y anti-cíclicas $-$.

Si el estado tiene dos números cuántico iguales (por ejemplo, $a = b$) el determinante tendrá dos filas iguales y se anulará. De acá se deduce el **principio de exclusión de Pauli**: No puede haber dos fermiones en el mismo estado cuántico.

La acción de este operador sobre un estado se puede calcular como el **determinante de slater**

$$A(|a\rangle_1|b\rangle_2|c\rangle_3)\sqrt{C} = \begin{vmatrix} |a\rangle_1 & |a\rangle_2 & |a\rangle_3 \\ |b\rangle_1 & |b\rangle_2 & |b\rangle_3 \\ |c\rangle_1 & |c\rangle_2 & |c\rangle_3 \end{vmatrix} \tag{29}$$

$$= |a\rangle_1 \left(|b\rangle_2|c\rangle_3 - |b\rangle_3|c\rangle_2\right) - |a\rangle_2 \left(|b\rangle_1|c\rangle_3 - |b\rangle_3|c\rangle_1\right) + |a\rangle_3 \left(|b\rangle_1|c\rangle_2 - |b\rangle_2|c\rangle_1\right) \tag{30}$$

$$= |a\rangle_1|b\rangle_2|c\rangle_3 - |a\rangle_1|c\rangle_2|b\rangle_3 - |b\rangle_1|a\rangle_2|c\rangle_3 + |c\rangle_1|a\rangle_2|b\rangle_3 + |b\rangle_1|c\rangle_2|a\rangle_3 - |c\rangle_1|b\rangle_2|a\rangle_3 \tag{31}$$

Permutaciones cíclicas tienen signo $+$ y anti-cíclicas $-$.

Si el estado tiene dos números cuántico iguales (por ejemplo, $a = b$) el determinante tendrá dos filas iguales y se anulará. De acá se deduce el **principio de exclusión de Pauli**: No puede haber dos fermiones en el mismo estado cuántico.

Si tenemos N partículas idénticas y M estados fermiónicos, los estados posibles son tantos como elegir N estados distintos de M posibles sin importar el orden: $\frac{M!}{N!(M-N)!}$.

$$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A < \mathcal{H}^{\otimes N} \tag{32}$$

b) Tres bosones de espín 1.

La base completa tiene $3 * 3 * 3 = 27$ elementos

$\{|1,1,1\rangle, |1,1,0\rangle, |1,1,-1\rangle, |1,0,1\rangle, |1,0,0\rangle, |1,0,-1\rangle, |1,-1,1\rangle, |1,-1,0\rangle, |1,-1,-1\rangle, |-1,1,1\rangle$
$|0,1,1\rangle, |0,1,0\rangle, |0,1,-1\rangle, |0,0,1\rangle, |0,0,0\rangle, |0,0,-1\rangle, |0,-1,1\rangle, |0,-1,0\rangle, |0,-1,-1\rangle, |-1,1,0\rangle$
$|-1,1,-1\rangle, |-1,0,1\rangle, |-1,0,0\rangle, |-1,0,-1\rangle, |-1,-1,1\rangle, |-1,-1,0\rangle, |-1,-1,-1\rangle\}$

b) Tres bosones de espín 1.

La base completa tiene $3 * 3 * 3 = 27$ elementos

$\{|1,1,1\rangle, |1,1,0\rangle, |1,1,-1\rangle, |1,0,1\rangle, |1,0,0\rangle, |1,0,-1\rangle, |1,-1,1\rangle, |1,-1,0\rangle, |1,-1,-1\rangle, |-1,1,1\rangle$

$|0,1,1\rangle, |0,1,0\rangle, |0,1,-1\rangle, |0,0,1\rangle, |0,0,0\rangle, |0,0,-1\rangle, |0,-1,1\rangle, |0,-1,0\rangle, |0,-1,-1\rangle, |-1,1,0\rangle$

$|-1,1,-1\rangle, |-1,0,1\rangle, |-1,0,0\rangle, |-1,0,-1\rangle, |-1,-1,1\rangle, |-1,-1,0\rangle, |-1,-1,-1\rangle\}$

Los estados

$$|1\rangle = |1,1,1\rangle, \quad |2\rangle = |0,0,0\rangle \quad , |3\rangle = |-1,-1,-1\rangle \tag{33}$$

ya son simétricos ante el intercambio de cualquier partícula.

b) Tres bosones de espín 1.

La base completa tiene $3*3*3=27$ elementos

$\{|1,1,1\rangle,|1,1,0\rangle,|1,1,-1\rangle,|1,0,1\rangle,|1,0,0\rangle,|1,0,-1\rangle,|1,-1,1\rangle,|1,-1,0\rangle,|1,-1,-1\rangle,|-1,1,1\rangle$
$|0,1,1\rangle,|0,1,0\rangle,|0,1,-1\rangle,|0,0,1\rangle,|0,0,0\rangle,|0,0,-1\rangle,|0,-1,1\rangle,|0,-1,0\rangle,|0,-1,-1\rangle,|-1,1,0\rangle$
$|-1,1,-1\rangle,|-1,0,1\rangle,|-1,0,0\rangle,|-1,0,-1\rangle,|-1,-1,1\rangle,|-1,-1,0\rangle,|-1,-1,-1\rangle\}$

Los estados

$$|1\rangle=|1,1,1\rangle, \quad |2\rangle=|0,0,0\rangle \quad ,|3\rangle=|-1,-1,-1\rangle \tag{33}$$

ya son simétricos ante el intercambio de cualquier partícula.Simetrizamos los de dos estados iguales

$$S|0,0,1\rangle \tag{34}$$

tenemos que hacer todas las combinaciones posibles de $(n_1+n_2+...n_j)$ caracteres de los cuales n_1 son iguales, n_2 son iguales etc. Tenemos en total

$$\frac{(n_1+n_2+...n_j)!}{n_1!n_2!...n_j!} \tag{35}$$

combinaciones posibles, esto dará la normalización.

En nuestro caso son $3!/(2!1!) = 3$. Explícitamente

$$|4\rangle = S|0,0,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|0,0,1\rangle + |1,0,0\rangle + |0,1,0\rangle\right) \tag{36}$$

$$|5\rangle = S|0,0,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|0,0,-1\rangle + |-1,0,0\rangle + |0,-1,0\rangle\right) \tag{37}$$

$$|6\rangle = S|1,1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1,1,0\rangle + |0,1,1\rangle + |1,0,1\rangle\right) \tag{38}$$

$$|7\rangle = S|1,1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1,1,-1\rangle + |-1,1,1\rangle + |1,-1,1\rangle\right) \tag{39}$$

$$|8\rangle = S|-1,-1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|-1,-1,0\rangle + |0,-1,-1\rangle + |-1,0,-1\rangle\right) \tag{40}$$

$$|9\rangle = S|-1,-1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|-1,-1,1\rangle + |1,-1,-1\rangle + |-1,1,-1\rangle\right) \tag{41}$$

Por último tenemos que simetrizar $|1, 0, -1\rangle$ tiene 3 caracteres distintos entonces hay $3!/(1!1!1!) = 6$ combinaciones posibles.

Por último tenemos que simetrizar $|1,0,-1\rangle$ tiene 3 caracteres distintos entonces hay $3!/(1!1!1!) = 6$ combinaciones posibles.Explícitamente el estado simetrizado es

$$|10\rangle = S|1,0,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|1,0,-1\rangle + |1,-1,0\rangle + |0,1,-1\rangle + |0,-1,1\rangle + |-1,1,0\rangle + |-1,0,1\rangle\right) \tag{42}$$

c) Dos fermiones de espín 7/2.

La base de una partícula viene dada por

$$\{|-7/2\rangle, |-5/2\rangle, |-3/2\rangle, |-1/2\rangle, |1/2\rangle, |3/2\rangle, |5/2\rangle, |7/2\rangle\}. \tag{43}$$

c) Dos fermiones de espín 7/2.

La base de una partícula viene dada por

$$\{|-7/2\rangle, |-5/2\rangle, |-3/2\rangle, |-1/2\rangle, |1/2\rangle, |3/2\rangle, |5/2\rangle, |7/2\rangle\}. \tag{43}$$

La base de dos fermiones viene dada por $8^2 = 64$ estados. Obtenemos los estados anti-simétricos aplicando el operador

$$A|7/2, 5/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|7/2, 5/2\rangle - |5/2, 7/2\rangle\right). \tag{44}$$

c) Dos fermiones de espín 7/2.

La base de una partícula viene dada por

$$\{|-7/2\rangle, |-5/2\rangle, |-3/2\rangle, |-1/2\rangle, |1/2\rangle, |3/2\rangle, |5/2\rangle, |7/2\rangle\}. \tag{43}$$

La base de dos fermiones viene dada por $8^2 = 64$ estados. Obtenemos los estados anti-simétricos aplicando el operador

$$A|7/2, 5/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|7/2, 5/2\rangle - |5/2, 7/2\rangle\right). \tag{44}$$

En general los estados de la base anti-simétrica son

$$|\alpha; \beta\rangle = A|\alpha, \beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\alpha, \beta\rangle - |\beta, \alpha\rangle\right) \tag{45}$$

con $\alpha, \beta \in \{-7/2, -5/2, ..., 5/2, 7/2\}$ y $\alpha \neq \beta$.

Ejercicio 109 Dos fermiones idénticos de espín $1/2$ se mueven en una dimensión bajo el efecto de un potencial de pozo infinito

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, x > L \\ 0 & 0 \leq x \leq L \end{cases} \tag{46}$$

a) Encontrar el nivel fundamental y los dos primeros niveles excitados, sus energías y correspondientes degeneraciones.

Partículas idénticas

Para $0 \leq x \leq L$ la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) \tag{47}$$

Para $0 \leq x \leq L$ la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) \tag{47}$$

Las soluciones de esta ecuación que además satisfacen

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \tag{48}$$

son

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \langle x|n\rangle, \quad n \in \mathbb{N} \tag{49}$$

Para $0 \leq x \leq L$ la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) \tag{47}$$

Las soluciones de esta ecuación que además satisfacen

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \tag{48}$$

son

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \langle x|n\rangle, \quad n \in \mathbb{N} \tag{49}$$

y las energías se pueden despejar reemplazando en la ecuación de Schrödinger

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \tag{50}$$

Para $0 \leq x \leq L$ la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) \tag{47}$$

Las soluciones de esta ecuación que además satisfacen

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \tag{48}$$

son

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \langle x|n\rangle, \quad n \in \mathbb{N} \tag{49}$$

y las energías se pueden despejar reemplazando en la ecuación de Schrödinger

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \tag{50}$$

La constante de normalización viene dada por

$$1 = \int_0^L |\psi(x)|^2 dx = A^2\frac{L}{2} \implies A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \tag{51}$$

Como los dos fermiones están en el mismo potencial y no interactúan la energía del sistema completo viene dada por

$$E_{n_1,n_2} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_1^2 + n_2^2), \tag{52}$$

si el primer fermión está en el estado $|n_1\rangle$ y el segundo en el $|n_2\rangle$.

Como los dos fermiones están en el mismo potencial y no interactúan la energía del sistema completo viene dada por

$$E_{n_1,n_2} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_1^2 + n_2^2), \tag{52}$$

si el primer fermión está en el estado $|n_1\rangle$ y el segundo en el $|n_2\rangle$.El estado de menor energía está dado por $n_1 = n_2 = 1$.

Partículas idénticas

Como los dos fermiones están en el mismo potencial y no interactúan la energía del sistema completo viene dada por

$$E_{n_1,n_2} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_1^2 + n_2^2), \tag{52}$$

si el primer fermión está en el estado $|n_1\rangle$ y el segundo en el $|n_2\rangle$.El estado de menor energía está dado por $n_1 = n_2 = 1$.Así la parte espacial de la función de onda será $|1, 1\rangle$ que es simétrica, luego la parte de espín tendrá que ser antisimétrica y el único estado de dos fermiones de espín $1/2$ es el singlete.

Como los dos fermiones están en el mismo potencial y no interactúan la energía del sistema completo viene dada por

$$E_{n_1,n_2} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_1^2 + n_2^2), \tag{52}$$

si el primer fermión está en el estado $|n_1\rangle$ y el segundo en el $|n_2\rangle$.El estado de menor energía está dado por $n_1 = n_2 = 1$.Así la parte espacial de la función de onda será $|1, 1\rangle$ que es simétrica, luego la parte de espín tendrá que ser antisimétrica y el único estado de dos fermiones de espín $1/2$ es el singlete.La función de onda queda

$$|\psi_{11}\rangle = |1, 1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \tag{53}$$

con energía

$$E_{1,1} = \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \tag{54}$$

y sin degeneración.

En general, si

$$|\Psi\rangle = |\psi_{\text{espacial}}\rangle \otimes |\chi_{\text{spin}}\rangle \tag{55}$$

$$\begin{matrix} S \\ A \\ A \\ S \end{matrix} = \begin{matrix} S & S \\ S & A \\ A & S \\ A & A \end{matrix}. \tag{56}$$

En caso particular de 2 partículas tenemos que

$$\mathcal{H}_{\text{espacial}} = \mathcal{H}^{A}_{\text{espacial}} \oplus \mathcal{H}^{S}_{\text{espacial}} \tag{57}$$

$$\mathcal{H}_{\text{spin}} = \mathcal{H}^{A}_{\text{spin}} \oplus \mathcal{H}^{S}_{\text{spin}} \tag{58}$$

$$\implies \mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}_{\text{spin}} = (\mathcal{H}^{A}_{\text{espacial}} \oplus \mathcal{H}^{S}_{\text{espacial}}) \otimes (\mathcal{H}^{A}_{\text{spin}} \oplus \mathcal{H}^{S}_{\text{spin}}) \tag{59}$$

$$= (\mathcal{H}^{A}_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^{A}_{\text{spin}}) \oplus (\mathcal{H}^{S}_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^{A}_{\text{spin}}) \oplus (\mathcal{H}^{A}_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^{S}_{\text{spin}}) \oplus (\mathcal{H}^{S}_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^{S}_{\text{spin}}) \tag{60}$$

En caso particular de 2 partículas tenemos que

$$\mathcal{H}_{\text{espacial}} = \mathcal{H}^A_{\text{espacial}} \oplus \mathcal{H}^S_{\text{espacial}} \tag{57}$$

$$\mathcal{H}_{\text{spin}} = \mathcal{H}^A_{\text{spin}} \oplus \mathcal{H}^S_{\text{spin}} \tag{58}$$

$$\implies \mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}_{\text{spin}} = (\mathcal{H}^A_{\text{espacial}} \oplus \mathcal{H}^S_{\text{espacial}}) \otimes (\mathcal{H}^A_{\text{spin}} \oplus \mathcal{H}^S_{\text{spin}}) \tag{59}$$

$$= (\mathcal{H}^A_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^A_{\text{spin}}) \oplus (\mathcal{H}^S_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^A_{\text{spin}}) \oplus (\mathcal{H}^A_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^S_{\text{spin}}) \oplus (\mathcal{H}^S_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^S_{\text{spin}}) \tag{60}$$

Así tendremos una base de estados anti-simétricos que tienen una paridad bien definida tanto para la parte espacial como para la parte de spin.

En caso particular de 2 partículas tenemos que

$$\mathcal{H}_{\text{espacial}} = \mathcal{H}^A_{\text{espacial}} \oplus \mathcal{H}^S_{\text{espacial}} \tag{57}$$

$$\mathcal{H}_{\text{spin}} = \mathcal{H}^A_{\text{spin}} \oplus \mathcal{H}^S_{\text{spin}} \tag{58}$$

$$\implies \mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}_{\text{spin}} = (\mathcal{H}^A_{\text{espacial}} \oplus \mathcal{H}^S_{\text{espacial}}) \otimes (\mathcal{H}^A_{\text{spin}} \oplus \mathcal{H}^S_{\text{spin}}) \tag{59}$$

$$= (\mathcal{H}^A_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^A_{\text{spin}}) \oplus (\mathcal{H}^S_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^A_{\text{spin}}) \oplus (\mathcal{H}^A_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^S_{\text{spin}}) \oplus (\mathcal{H}^S_{\text{espacial}} \otimes \mathcal{H}^S_{\text{spin}}) \tag{60}$$

Así tendremos una base de estados anti-simétricos que tienen una paridad bien definida tanto para la parte espacial como para la parte de spin.

¡Cuidado! Para más partículas ya no vale que $\mathcal{H} = \mathcal{H}^A \oplus \mathcal{H}^S$ por lo que no existirá, en general, una base con paridad bien definida en ambas partes.

El primer excitado debe tener $n_1 = 1$ y $n_2 = 2$ o $n_1 = 2$ y $n_2 = 1$. Una base de estos estados es

$$\{|1+;2+\rangle, |1+;2-\rangle, |1-;2+\rangle, |1-;2-\rangle|2+;1+\rangle, |2+;1-\rangle, |2-;1+\rangle, |2-;1-\rangle\}. \tag{61}$$

El primer excitado debe tener $n_1 = 1$ y $n_2 = 2$ o $n_1 = 2$ y $n_2 = 1$. Una base de estos estados es

$$\{|1+;2+\rangle, |1+;2-\rangle, |1-;2+\rangle, |1-;2-\rangle|2+;1+\rangle, |2+;1-\rangle, |2-;1+\rangle, |2-;1-\rangle\}. \tag{61}$$

Podemos obtener la base de estados totalmente anti-simétricos aplicando el anti-simetrizador

$$|\psi_{12}^{(1)}\rangle = A|1+;2+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1+;2+\rangle - |2+;1+\rangle\right) \tag{62}$$

$$|\psi_{12}^{(2)}\rangle = A|1+;2-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1+;2-\rangle - |2-;1+\rangle\right) \tag{63}$$

$$|\psi_{12}^{(3)}\rangle = A|1-;2+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1-;2+\rangle - |2+;1-\rangle\right) \tag{64}$$

$$|\psi_{12}^{(4)}\rangle = A|1-;2-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1-;2-\rangle - |2-;1-\rangle\right). \tag{65}$$

En este caso también tenemos la base con paridad bien definida en ambas partes

$$|\phi_{12}^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle + |21\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right) \tag{66}$$

$$|\phi_{12}^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle - |21\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) \tag{67}$$

$$|\phi_{12}^{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle - |21\rangle\right) \otimes |++\rangle \tag{68}$$

$$|\phi_{12}^{(4)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle - |21\rangle\right) \otimes |--\rangle. \tag{69}$$

Estos estados están un nivel de energía

$$E_{1,2} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 5 \tag{70}$$

con degeneración 4.

b) Se agrega una interacción

$$W = -\eta\delta(x_1 - x_2)\mathsf{S}_1 \cdot \mathsf{S}_2 \tag{71}$$

donde ηes una constante y los subíndices 1 y 2 denotan que la magnitud corresponde a la partículas 1 o 2, respectivamente. Calcular las correcciones para la energía de los niveles hallados en el inciso anterior a prim er orden en η.

b) Se agrega una interacción

$$W = -\eta\delta(x_1 - x_2)\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \tag{71}$$

donde ηes una constante y los subíndices 1 y 2 denotan que la magnitud corresponde a la partículas 1 o 2, respectivamente. Calcular las correcciones para la energía de los niveles hallados en el inciso anterior a prim er orden en η.

Podemos reescribir la interacción como

$$W = -\eta\delta(x_1 - x_2)\frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2). \tag{72}$$

Calculamos las correcciones a primer orden como

$$\langle\psi_{11}|W|\psi_{11}\rangle = -\frac{\eta}{2}\langle 1,1|\delta(x_1 - x_2)|1,1\rangle\langle 0,0|(S^2 - S_1^2 - S_2^2)|0,0\rangle, \tag{73}$$

siendo $|0,0\rangle$ el singlete de espín.

Calculamos las correcciones a primer orden como

$$\langle\psi_{11}|W|\psi_{11}\rangle = -\frac{\eta}{2}\langle 1,1|\delta(x_1 - x_2)|1,1\rangle\langle 0,0|(S^2 - S_1^2 - S_2^2)|0,0\rangle, \tag{73}$$

siendo $|0,0\rangle$ el singlete de espín.Expresando las funciones de onda en la base de posición tenemos

$$\langle\psi_{11}|W|\psi_{11}\rangle = -\frac{\eta}{2}\int_0^L\int_0^L \psi_1^*(x_1)\psi_1^*(x_2)\delta(x_1-x_2)\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)dx_1 dx_2\hbar^2(0*1-1/2*3/2-1/2*3/2) \tag{74}$$

$$= \frac{3\eta\hbar^2}{4}\int_0^L |\psi_1(x_1)|^4 dx_1 = \frac{9\eta\hbar^2}{8L}. \tag{75}$$

Calculamos las correcciones a primer orden como

$$\langle\psi_{11}|W|\psi_{11}\rangle = -\frac{\eta}{2}\langle 1,1|\delta(x_1-x_2)|1,1\rangle\langle 0,0|(S^2-S_1^2-S_2^2)|0,0\rangle, \tag{73}$$

siendo $|0,0\rangle$ el singlete de espín.Expresando las funciones de onda en la base de posición tenemos

$$\langle\psi_{11}|W|\psi_{11}\rangle = -\frac{\eta}{2}\int_0^L\int_0^L \psi_1^*(x_1)\psi_1^*(x_2)\delta(x_1-x_2)\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)dx_1dx_2\hbar^2(0*1-1/2*3/2-1/2*3/2) \tag{74}$$

$$= \frac{3\eta\hbar^2}{4}\int_0^L|\psi_1(x_1)|^4dx_1 = \frac{9\eta\hbar^2}{8L}. \tag{75}$$

Para que la correción sea pequeña

$$\frac{9\eta\hbar^2}{8L} \ll E_{11} = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} \implies \eta \ll \frac{1}{mL}. \tag{76}$$

Calculamos las correcciones a primer orden como

$$\langle\psi_{11}|W|\psi_{11}\rangle = -\frac{\eta}{2}\langle 1,1|\delta(x_1-x_2)|1,1\rangle\langle 0,0|(S^2-S_1^2-S_2^2)|0,0\rangle, \tag{73}$$

siendo $|0,0\rangle$ el singlete de espín.Expresando las funciones de onda en la base de posición tenemos

$$\langle\psi_{11}|W|\psi_{11}\rangle = -\frac{\eta}{2}\int_0^L\int_0^L \psi_1^*(x_1)\psi_1^*(x_2)\delta(x_1-x_2)\psi_1(x_1)\psi_1(x_2)dx_1dx_2\hbar^2(0*1-1/2*3/2-1/2*3/2) \tag{74}$$

$$= \frac{3\eta\hbar^2}{4}\int_0^L|\psi_1(x_1)|^4dx_1 = \frac{9\eta\hbar^2}{8L}. \tag{75}$$

Para que la correción sea pequeña

$$\frac{9\eta\hbar^2}{8L} \ll E_{11} = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} \implies \eta \ll \frac{1}{mL}. \tag{76}$$

La energía del fundamental resulta ser

$$E_0 \approx E_{11} + \langle\psi_{11}|W|\psi_{11}\rangle = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} + \frac{9\eta\hbar^2}{8L}. \tag{77}$$

Como el primer estado excitado está degenerado debemos diagonalizar su matriz. Calculamos los elementos de matriz

$$\langle \phi_{12}^{(k)} | W | \phi_{12}^{(j)} \rangle \tag{78}$$

Partículas idénticas

Como el primer estado excitado está degenerado debemos diagonalizar su matriz. Calculamos los elementos de matriz

$$\langle \phi_{12}^{(k)} | W | \phi_{12}^{(j)} \rangle \tag{78}$$

Si la parte espacial es antisimétrica, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle 12| - \langle 21| \right) \delta(x_1 - x_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|12\rangle - |21\rangle \right) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 \left(\psi_1^*(x_1)\psi_2^*(x_2) - \psi_1^*(x_2)\psi_2^*(x_1) \right) \delta(x_1 - x_2) \left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_1(x_2)\psi_2(x_1) \right) \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \cancel{\left(\psi_1^*(x_1)\psi_2^*(x_1) - \psi_1^*(x_1)\psi_2^*(x_1) \right)} \cancel{\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_1) - \psi_1(x_1)\psi_2(x_1) \right)} = 0 \tag{81}$$

Como el primer estado excitado está degenerado debemos diagonalizar su matriz. Calculamos los elementos de matriz

$$\langle \phi_{12}^{(k)} | W | \phi_{12}^{(j)} \rangle \tag{78}$$

Si la parte espacial es antisimétrica, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle 12| - \langle 21| \right) \delta(x_1 - x_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|12\rangle - |21\rangle \right) \tag{79}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2 \left(\psi_1^*(x_1)\psi_2^*(x_2) - \psi_1^*(x_2)\psi_2^*(x_1) \right) \delta(x_1 - x_2) \left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_1(x_2)\psi_2(x_1) \right) \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L dx_1 \cancel{\left(\psi_1^*(x_1)\psi_2^*(x_1) - \psi_1^*(x_1)\psi_2^*(x_1) \right)} \cancel{\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_1) - \psi_1(x_1)\psi_2(x_1) \right)} = 0 \tag{81}$$

Si la parte de espín es antisimétrica para uno y simétrica para el otro tenemos, tenemos

$$\langle 1, m | (S^2 - S_1^2 - S_2^2) | 0, 0 \rangle = -\frac{3}{2} \langle 1, m | 0, 0 \rangle = 0. \tag{82}$$

Partículas idénticas

Así tenemos $\langle \phi_{12}^{(k)} | W | \phi_{12}^{(j)} \rangle = 0$, excepto para $j = k = 1$

Partículas idénticas

Así tenemos $\langle\phi_{12}^{(k)}|W|\phi_{12}^{(j)}\rangle = 0$, excepto para $j = k = 1$

$$\langle\phi_{12}^{(1)}|W|\phi_{12}^{(1)}\rangle = -\eta\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 12| + \langle 21|\right)\delta(x_1 - x_2)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle + |21\rangle\right)\langle 0,0|(S^2 - S_1^2 - S_2^2)|0,0\rangle \quad (83)$$

$$= \frac{3\eta}{4}\int_0^L dx_1\left(\psi_1^*(x_1)\psi_2^*(x_1) + \psi_2^*(x_1)\psi_1^*(x_1)\right)\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_1) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_1)\right) \quad (84)$$

$$= \frac{3\eta}{4}\int_0^L dx_1 2|\psi_1(x_1)|^2|\psi_2(x_1)|^2 = \frac{3\hbar^2\eta}{2L}. \quad (85)$$

Así tenemos $\langle\phi_{12}^{(k)}|W|\phi_{12}^{(j)}\rangle = 0$, excepto para $j = k = 1$

$$\langle\phi_{12}^{(1)}|W|\phi_{12}^{(1)}\rangle = -\eta\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 12| + \langle 21|\right)\delta(x_1 - x_2)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|12\rangle + |21\rangle\right)\langle 0,0|(S^2 - S_1^2 - S_2^2)|0,0\rangle \quad (83)$$

$$= \frac{3\eta}{4}\int_0^L dx_1\left(\psi_1^*(x_1)\psi_2^*(x_1) + \psi_2^*(x_1)\psi_1^*(x_1)\right)\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_1) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_1)\right) \quad (84)$$

$$= \frac{3\eta}{4}\int_0^L dx_1 2|\psi_1(x_1)|^2|\psi_2(x_1)|^2 = \frac{3\hbar^2\eta}{2L}. \quad (85)$$

La perturbación rompe la degeneración de 4 estados en 3 estados degenerados que siguen con la energía sin perturbar y 1 estado que pasa a tener energía

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 5 + \frac{3\hbar^2\eta}{2L}. \quad (86)$$

Ejercicio extra Considere dos partículas y sea $D = \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ la distancia cuadrática media entre las partículas, con x_1 y x_2 la posición de cada partícula. Supongamos que las partículas están en dos estados ortogonales $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$. Calcule entonces la distancia cuadrática media en los casos en que

a) Las partículas son distinguibles.

b) Las partículas son bosones indistinguibles

c) Las partículas son fermiones indistinguibles.

Compare los resultados e interprete.

Partículas idénticas

a) Como las partículas son distinguibles el estado será

$$|\psi\rangle = |\alpha, \beta\rangle \implies \psi(x_1, x_2) = \alpha(x_1)\beta(x_2) \tag{87}$$

a) Como las partículas son distinguibles el estado será

$$|\psi\rangle = |\alpha, \beta\rangle \implies \psi(x_1, x_2) = \alpha(x_1)\beta(x_2) \tag{87}$$

Calculamos la disntancia

$$D = \langle\psi|D|\psi\rangle = \int\int dx_1 dx_1 (x_1 - x_2)^2 |\alpha(x_1)|^2 |\beta(x_2)|^2 \tag{88}$$

$$= \int\int dx_1 dx_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) |\alpha(x_1)|^2 |\beta(x_2)|^2 \tag{89}$$

$$= \langle x^2\rangle_\alpha + \langle x^2\rangle_\beta - 2\langle x\rangle_\alpha \langle x\rangle_\beta . \tag{90}$$

Partículas idénticas

a) Como las partículas son distinguibles el estado será

$$|\psi\rangle = |\alpha, \beta\rangle \implies \psi(x_1, x_2) = \alpha(x_1)\beta(x_2) \tag{87}$$

Calculamos la disntancia

$$D = \langle\psi|D|\psi\rangle = \int\int dx_1 dx_1 (x_1 - x_2)^2 |\alpha(x_1)|^2 |\beta(x_2)|^2 \tag{88}$$

$$= \int\int dx_1 dx_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)|\alpha(x_1)|^2 |\beta(x_2)|^2 \tag{89}$$

$$= \langle x^2\rangle_\alpha + \langle x^2\rangle_\beta - 2\langle x\rangle_\alpha \langle x\rangle_\beta. \tag{90}$$

b y c) El estado será

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha(x_1)\beta(x_2) \pm \alpha(x_2)\beta(x_1)\right] \tag{91}$$

con el $+$ para los bosones y $-$ para los fermiones.

Calculamos la distancia

$$D = \langle\psi|D|\psi\rangle = \frac{1}{2}\int\int dx_1 dx_1 (x_1 - x_2)^2 |\alpha(x_1)\beta(x_2) \pm \alpha(x_2)\beta(x_1)|^2 \tag{92}$$

$$= \frac{1}{2}\int\int dx_1 dx_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)\left[\alpha^2(x_1)\beta^2(x_2) + \alpha^2(x_2)\beta^2(x_1) \pm 2\alpha(x_2)\alpha(x_1)\beta(x_1)\beta(x_2)\right] \tag{93}$$

$$= \langle x^2\rangle_\alpha + \langle x^2\rangle_\beta - 2\langle x\rangle_\alpha\langle x\rangle_\beta \mp 2\int\int dx_1 dx_1 x_1 x_2 \alpha(x_2)\alpha(x_1)\beta(x_1)\beta(x_2) \tag{94}$$

Calculamos la distancia

$$D = \langle\psi|D|\psi\rangle = \frac{1}{2}\int\int dx_1 dx_1 (x_1 - x_2)^2 |\alpha(x_1)\beta(x_2) \pm \alpha(x_2)\beta(x_1)|^2 \tag{92}$$

$$= \frac{1}{2}\int\int dx_1 dx_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)\left[\alpha^2(x_1)\beta^2(x_2) + \alpha^2(x_2)\beta^2(x_1) \pm 2\alpha(x_2)\alpha(x_1)\beta(x_1)\beta(x_2)\right] \tag{93}$$

$$= \langle x^2\rangle_\alpha + \langle x^2\rangle_\beta - 2\langle x\rangle_\alpha\langle x\rangle_\beta \mp 2\int\int dx_1 dx_1 x_1 x_2 \alpha(x_2)\alpha(x_1)\beta(x_1)\beta(x_2) \tag{94}$$

Notemos que

$$\int\int dx_1 dx_1 x_1 x_2 \alpha(x_2)\alpha(x_1)\beta(x_1)\beta(x_2) = \left(\int dx_1 x_1 \alpha(x_1)\beta(x_1)\right)^2 \geq 0 \tag{95}$$

Partículas idénticas

Calculamos la distancia

$$D = \langle\psi|D|\psi\rangle = \frac{1}{2}\int\int dx_1 dx_1 (x_1 - x_2)^2 |\alpha(x_1)\beta(x_2) \pm \alpha(x_2)\beta(x_1)|^2 \tag{92}$$

$$= \frac{1}{2}\int\int dx_1 dx_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)\left[\alpha^2(x_1)\beta^2(x_2) + \alpha^2(x_2)\beta^2(x_1) \pm 2\alpha(x_2)\alpha(x_1)\beta(x_1)\beta(x_2)\right] \tag{93}$$

$$= \langle x^2\rangle_\alpha + \langle x^2\rangle_\beta - 2\langle x\rangle_\alpha\langle x\rangle_\beta \mp 2\int\int dx_1 dx_1 x_1 x_2 \alpha(x_2)\alpha(x_1)\beta(x_1)\beta(x_2) \tag{94}$$

Notemos que

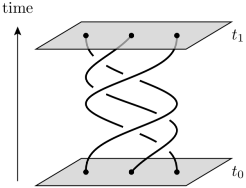
$$\int\int dx_1 dx_1 x_1 x_2 \alpha(x_2)\alpha(x_1)\beta(x_1)\beta(x_2) = \left(\int dx_1 x_1 \alpha(x_1)\beta(x_1)\right)^2 \geq 0 \tag{95}$$

Vemos que la distancia cuadrática media es menor que si fueran indistinguibles para los bosones y mayor para los fermiones. Sin embargo no hay ninguna fuerza que los separe sino que es un efecto puramente estadístico. Esto da lugar a la presión de degeneración que permite la formación de las estrellas enanas blancas.

Definición alternativa

En vez de definir el operador permutación que solo intercambia los números cuánticos del estados, podríamos definir la permutación más físicamente como intercambiar ambas partículas en el espacio físico a través de trayectorias adiabáticas.

Esto hace que si intercambiamos dos veces no necesariamente volvamos al mismo estado sino que podemos juntar una fase $|\alpha, \beta\rangle = e^{i\theta}|\beta, \alpha\rangle$.



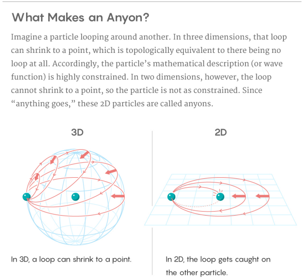
Partículas idénticas

En 3 o más dimensiones ambas definiciones dan lugar a los bosones y fermiones.

En 2 dimensiones esta otra definición da lugar a partículas con estadística mixta llamadas **anyones**. ¿Existen?

En 3 o más dimensiones ambas definiciones dan lugar a los bosones y fermiones.

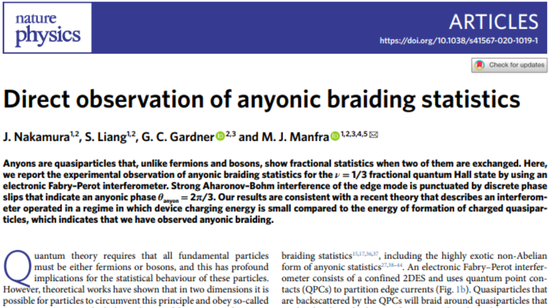
En 2 dimensiones esta otra definición da lugar a partículas con estadística mixta llamadas **anyones**. ¿Existen?


What Makes an Anyon?

Imagine a particle looping around another. In three dimensions, that loop can shrink to a point, which is topologically equivalent to there being no loop at all. Accordingly, the particle's mathematical description (or wave function) is highly constrained. In two dimensions, however, the loop cannot shrink to a point, so the particle is not as constrained. Since "anything goes," these 2D particles are called anyons.

In 3D, a loop can shrink to a point.

In 2D, the loop gets caught on the other particle.


nature physics
ARTICLES
https://doi.org/10.1038/s41567-020-1019-1
Check for updates

Direct observation of anyonic braiding statistics

J. Nakamura[1,2], S. Liang[1,2], G. C. Gardner[2,3] and M. J. Manfra[1,2,3,4,5]

Anyons are quasiparticles that, unlike fermions and bosons, show fractional statistics when two of them are exchanged. Here, we report the experimental observation of anyonic braiding statistics for the $\nu = 1/3$ fractional quantum Hall state by using an electronic Fabry–Perot interferometer. Strong Aharonov–Bohm interference of the edge mode is punctuated by discrete phase slips that indicate an anyonic phase $\theta_{anyon} = 2\pi/3$. Our results are consistent with a recent theory that describes an interferometer operated in a regime in which device charging energy is small compared to the energy of formation of charged quasiparticles, which indicates that we have observed anyonic braiding.

Quantum theory requires that all fundamental particles must be either fermions or bosons, and this has profound implications for the statistical behaviour of these particles. However, theoretical works have shown that in two dimensions it is possible for particles to circumvent this principle and obey so-called braiding statistics[15,17,36,37], including the highly exotic non-Abelian form of anyonic statistics[27,38–44]. An electronic Fabry–Perot interferometer consists of a confined 2DES and uses quantum point contacts (QPCs) to partition edge currents (Fig. 1b). Quasiparticles that are backscattered by the QPCs will braid around quasiparticles that