11 El ejercicio nos pide probar una identidad que será muy útil a lo largo de la materia. Al trabajar con operadores hay que tener un poco más de cuidado que con los números, como vamos a ver en esta propiedad. La exponencial de un operador es una relación que se desprende de la fórmula más general de Baker-Campbell-Haussdorf.

Dados dos operadores A y B tales que para ambos se verifica $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, entonces

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

Para probar esta identidad vamos a usar las siguientes propiedades de los conmutadores

$$\begin{aligned} [A,B^n] &= nB^{n-1}[A,B] && (1)\\ [f(A),B] &= f'(A)[A,B] \quad \text{para toda función } f \text{ analítica.} && (2)\\ [A,BC] &= B[A,C]+[A,B]C \quad \text{si [B,[A,B]]=0.} && (3) \end{aligned}$$

La propiedad 2 la cumple la función exponencial dado que al expandirla como serie de potencias, vemos que es una función analítica. Recordemos que

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

Consideremos la función $g(\lambda) = e^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\lambda(A+B)}$, donde los operadores A y B verifican la hipótesis de la propiedad que queremos demostrar. Veamos que esta función satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dg}{d\lambda} = \lambda[A,B]g \tag{4}$$

Para ver que la función g dada satisface 4, veamos su derivada

$$\frac{dg}{d\lambda} = Ae^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\lambda(A+B)} + e^{\lambda A}Be^{\lambda B}e^{-\lambda(A+B)} - e^{\lambda A}e^{\lambda B}(A+B)e^{-\lambda(A+B)}$$

Usando la propiedad 2,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\lambda} &= Ag(\lambda) + e^{\lambda A}(Be^{\lambda B}e^{-\lambda(A+B)} - e^{\lambda B}Be^{-\lambda(A+B)} - e^{\lambda B}Ae^{-\lambda(A+B)})\\ &= Ag(\lambda) + e^{\lambda A}(\lambda e^{\lambda B}[B,B]e^{-\lambda(A+B)} - e^{\lambda B}Ae^{-\lambda(A+B)})\\ &= Ag(\lambda) - e^{\lambda A}e^{\lambda B}Ae^{-\lambda(A+B)}\\ &= Ae^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\lambda(A+B)} - e^{\lambda A}e^{\lambda B}Ae^{-\lambda(A+B)}\\ &= [A,e^{\lambda A}e^{\lambda B}]e^{-\lambda(A+B)}\\ &= (e^{\lambda A}[A,e^{\lambda B}] + [A,e^{\lambda A}]e^{\lambda B})e^{-\lambda(A+B)}\\ &= \lambda e^{\lambda A}e^{\lambda B}[A,B]e^{-\lambda(A+B)} = \lambda e^{\lambda A}e^{\lambda B}e^{-\lambda(A+B)}[A,B]\\ &= \lambda g(\lambda)[A,B] \end{aligned}$$

Hemos usado que por hipótesis, $[[A,B],e^{-\lambda(A+B)}] = 0$, por lo que se puede intercambiar el orden del conmutador con la exponencial en el anteúltimo renglón. De esta forma, probamos que la función $g(\lambda)$ propuesta verifica la ecuación diferencial 4. Resolvamos ahora la ecuación diferencial.

$$\frac{dg}{d\lambda} = \lambda g(\lambda)[A, B]$$
$$\int \frac{dg}{g} = \int \lambda [A, B] d\lambda$$
$$\ln(g) = [A, B]\frac{\lambda^2}{2}$$
$$\implies g(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{2}[A,B]}$$

Por lo tanto,

$$e^{\frac{\lambda^2}{2}[A,B]} = g(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{-\lambda(A+B)}$$

Tomando $\lambda = 1$, tenemos que

$$e^{\frac{1}{2}[A,B]} = e^{A} e^{B} e^{-(A+B)}$$

Finalmente, dado que $[A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]]$, podemos obtener finalmente

$$e^{A} e^{B} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

Que es lo que queríamos probar.