$\boxed{100}$ Tenemos un sistema compuesto por dos objetos de espín 1/2. Para tiempos $t < 0$ el Hamiltoniano no depende del espín y puede igualarse a cero. Para tiempos $t > 0$ el mismo está dado por

$$H = \frac{4\Delta}{\hbar^2}\mathbf{S}_1.\mathbf{S}_2$$

A $t < 0$ el sistema se encuentra en el estado $|+-\rangle$. Queremos hallar la probabilidad de encontrar al sistema en los estados $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ y $|--\rangle$ a tiempos $t > 0$.

(a) Resolvemos el problema de forma exacta.

Dado que a tiempos $t > 0$ el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, podemos evolucionar temporalmente el estado inicial con el operador de evolución $U(t, 0) = e^{-iHt/\hbar}$. El estado inicial es $|\psi(0) = |+-\rangle$, por lo que el estado final estará dado por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|+-\rangle$$

Es necesario saber cómo actúa el hamiltoniano sobre el estado $|+-\rangle$. Para ello escribimos el operador $\mathbf{S_1}.\mathbf{S_2}$ como

$$\mathbf{S}_1.\mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}^2 - \mathbf{S}_1^2 - \mathbf{S}_2^2)$$

Y escribimos el estado en base acoplada utilizando la tabla de Clebsch-Gordan.

$$|+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |00\rangle)$$

Para ver cómo actúa H sobre este estado, evaluamos para cada operador de espín.

$$\mathbf{S}^2|10\rangle = 2\hbar^2|10\rangle$$
$$\mathbf{S}^2|00\rangle = 0$$

Para los operadores de espín $\mathbf{S}_1^2$ y $\mathbf{S}_2^2$ resulta más conveniente volver a la base desacoplada, recordando que ambos objetos tienen espín total 1/2. De esta forma, $\mathbf{S}_1^2|+-\rangle = \mathbf{S}_2^2|+-\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|+-\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle) + |00\rangle)$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} H|10\rangle &= \frac{4\Delta}{\hbar^2}\frac{1}{2}(\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2)|10\rangle \\ &= \frac{4\Delta}{\hbar^2}\frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{2}|10\rangle \\ &= \Delta|10\rangle \\ H|00\rangle &= \frac{4\Delta}{\hbar^2}\frac{1}{2}(\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}\hbar^2)|00\rangle \\ &= -3\Delta|00\rangle \end{aligned}$$

Ahora si podemos aplicar el operador de evolución temporal. El estado a tiempo $t > 0$ será

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\Delta t/\hbar}|10\rangle + e^{i3\Delta t/\hbar}|00\rangle\right)$$

Para calcular las probabilidades, recordemos que $|++\rangle = |11\rangle$, $|--\rangle = |1-1\rangle$, y $|-+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |00\rangle)$. De esta manera,

$$\begin{aligned} P(|++\rangle) &= 0 \\ P(|--\rangle) &= 0 \\ P(|-+\rangle) &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos(\tfrac{4\Delta t}{\hbar})) \\ P(|+-\rangle) &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos(\tfrac{4\Delta t}{\hbar})) \end{aligned}$$

(b) Ahora calculamos las probabilidades suponiendo que vale teoría de perturbaciones. Como el estado inicial es $|+-\rangle$, el único coefcíente a orden 0 será el que corresponde a ese mismo estado, y valdrá 1, esto es $a^{(0)}_{+-} = 1$. Para hallar el primer orden, recordamos que

$$a^{(1)}_m(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t dt' e^{i\omega t'} \langle m|H|+-\rangle$$

Por ortogonalidad, el único elemento que puede haber a orden 1 es $a^(1)_{-+}$. Por lo tanto hay que calcular el elemento $\langle -+|H|+-\rangle$. Ya calculamos en el inciso anterior cómo actúa el Hamiltoniano sobre los estados de la base acoplada, por lo que escribiendo los estados en esa base es sencillo ver que

$$\langle -+|H|+-\rangle = 2\Delta$$

Como incialmente el hamiltoniano es 0, $\omega = 0$. Por lo tanto,

$$a^{(1)}_{-+}(t) = \frac{1}{i\hbar} 2\Delta t$$

De esta forma, la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|-+\rangle$ está dada por

$$P(|-+\rangle) = |a^{(1)}_{-+}(t)|^2 = \frac{4\Delta^2 t^2}{\hbar^2}$$

Es sencillo ver que la probabilidad calculada al resolver el problema de manera exacta se puede aproximar a segundo orden cuando el argumento del coseno es pequeño,

$$P_{exacta}(|-+\rangle) = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{4\Delta t}{\hbar}\right)\right) \sim \frac{1}{2}\left(1-1-8\frac{\Delta^2 t^2}{\hbar^2}\right) = \frac{4\Delta^2 t^2}{\hbar^2}$$

Por lo tanto, el desarrollo perturbativo es una buena aproximación para el caso en que $\Delta \ll \frac{\hbar}{t}$