$\boxed{26}$ Con este problema vemos un modelo sencillo para entender el fenómeno de oscilaciones de neutrinos.

Los experimentos llevados a cabo actualmente con neutrinos de distinta naturaleza (solares, atmosféricos) presentan fuertes evidencias a favor de la existencia de oscilaciones de neutrinos, es decir, transiciones entre neutrinos de distintos sabores causadas por la presencia de masas y mezclas. La existencia de estas oscilaciones implica que dado un neutrino de un determinado sabor, ν_α, con energía E, que se produce en algún proceso de interacción débil, a una distancia suficientemente larga L de la fuente de producción, la probabilidad de encontrar un neutrino de un diferente sabor ν_β, no es nula. A modo de ejemplo, si solo fueran detectados neutrinos muónicos en un dado experimento y estos sufrieran oscilaciones, se observaría una desaparición de dichos neutrinos en el camino de la fuente hacia el detector. Este fenómeno de desaparición debido a oscilaciones fue observado, en el caso de neutrinos atmosféricos ν_μ en experimentos del $Super-Kamiokande$. En el año 2015, el premio Nobel fue otorgado a los investigadores que detectaron experimentalmente este fenómeno.

Supongamos que tenemos dos estados de sabor (es decir, los estados asociados a las partículas que se observan en el laboratorio) ν_e, ν_μ. Estos estados no son autoestados del Hamiltoniano libre (suponemos que la propagación de estos neutrinos es en vacío). Los estados de masa ν_1 y ν_2 son autoestados del Hamiltoniano, es decir,

$$H|\nu_i(\mathbf{p})\rangle = E_i(\mathbf{p})|\nu_i(\mathbf{p})\rangle$$

Los estados de sabor se pueden escribir en términos de los estados de masa a partir de una rotación

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1(\mathbf{p})\rangle + \text{sen}\theta|\nu_2(\mathbf{p})\rangle$$
$$|\nu_\mu\rangle = -\text{sen}\theta|\nu_1(\mathbf{p})\rangle + \cos\theta|\nu_2(\mathbf{p})\rangle$$

El Hamiltoniano del sistema escrito en forma matricial, en la base $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ está dado por la matriz

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

Los estados de sabor y los estados de masa están relacionados a partir de la matriz de rotación U

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}|\nu_i\rangle$$

Como los estados de masa son autoestados del Hamiltoniano, su evolución temporal a un tiempo t está dada por

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}|\nu_i\rangle$$

Por lo tanto, un estado de sabor a tiempo t estará dado por

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= \sum_i U_{\alpha i}|\nu_i(t)\rangle \\ &= \sum_i U_{\alpha i} e^{-\frac{i}{\hbar}E_i t}|\nu_i\rangle \qquad (1) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que inicialmente tenemos un neutrino electrónico ν_e, calculemos la probabilidad de hallar un neutrino muónico ν_μ a tiempo $t > 0$. Es decir, calculemos

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = |\langle \nu_\mu | \nu_e(t) \rangle|^2$$

De la ecuación 1 vemos que

$$\begin{aligned}|\nu_e(t)\rangle &= U_{e1} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|\nu_1\rangle + U_{e2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|\nu_2\rangle \\ &= \cos\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|\nu_1\rangle + \text{sen}\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|\nu_2\rangle\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\langle \nu_\mu| = -\text{sen}\theta \langle \nu_1| + \cos\theta \langle \nu_2|$$

De esta manera, la probabilidad que queremos calcular será

$$\begin{aligned}P(\nu_e \to \nu_\mu) &= |(-\text{sen}\theta\langle\nu_1| + \cos\theta\langle\nu_2|)|(\cos\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|\nu_1\rangle + \text{sen}\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|\nu_2\rangle)|^2 \\ &= |-\text{sen}\theta\cos\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + \text{sen}\theta\cos\theta e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|^2 \\ &= \text{sen}^2\theta\cos^2\theta|-e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|^2 \\ &= \text{sen}^2\theta\cos^2\theta(-e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t} + e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t})(-e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}) \\ &= \frac{1}{4}\text{sen}^2(2\theta)(2 - e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} - e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t}) \\ &= \frac{1}{4}\text{sen}^2(2\theta)\left(2 - 2\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)\right) \\ &= \text{sen}^2(2\theta)\text{sen}^2\left(\frac{E_2-E_1}{2\hbar}t\right)\end{aligned}$$

De esta forma vemos que la probabilidad de obtener un neutrino de distinto sabor no es nula. Es sencillo ver que si el ángulo de mezcla fuera nulo, la probabilidad sería nula también.
Como los neutrinos son partículas ultrarrelativistas, podemos aproximar la diferencia de energías $E_i - E_j$ por

$$E_i(\mathbf{p}) - E_j(\mathbf{p}) \simeq \frac{1}{2}\frac{m_i^2 - m_j^2}{|\mathbf{p}|}$$

Definiendo $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$, podemos reescribir la probabilidad hallada anteriormente en términos de la diferencia de masas. Obtenemos entonces

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = sin^2(2\theta)\text{sen}^2\left(\frac{\Delta m^2}{4|\mathbf{p}|\hbar}t\right)$$

Vemos entonces que para que existan las oscilaciones de neutrinos es necesario que al menos dos de ellos tengan masas distintas. Esto permitió determinar que, dada la existencia de ocilaciones de nuetrinos observadas experimentalmente, no sólo los neutrinos debían ser masivos, sino tener masas distintas.