$\boxed{1}$ Una caja que en su interior contiene una partícula es dividida en dos compartimentos (izquierdo y derecho). Si se sabe que la partícula está del lado derecho (izquierdo) con certeza, el estado normalizado de la misma se representa por $|R\rangle$ ($|L\rangle$). El espacio de Hilbert relevante para la descripción de la ubicación de la partícula dentro de la caja tiene como base ortonormal al conjunto $\{|R\rangle, |L\rangle\}$. La película que divide a la caja en dos partes es tal que la partícula puede *tunelear* a través de ella y pasar de un lado a otro de la caja. Supongamos que este efecto es caracterizado por el Hamiltoniano

$$H = \Delta \left(|L\rangle \langle R| + |R\rangle \langle L| \right)$$

donde Δ es un número positivo con dimensiones de energía.

(a) Encuentre los niveles de energía del sistema y sus autoestados correspondientes.

Los niveles de energía y sus autoestados son los autovalores y autovectores normalizados de H. Dicho operador escrito en la base $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ es la matriz

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}.$$

Sus autovalores λ salen de resolver la ecuación

$$\det\left(H - \lambda I\right) = 0 \implies \left| \begin{bmatrix} -\lambda & \Delta \\ \Delta & -\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \implies \lambda^2 - \Delta^2 = 0 \implies \lambda = \pm\Delta\,.$$

El autovector $\bar{v}^{\pm\Delta} = \begin{bmatrix} v_1^{\pm\Delta} \\ v_2^{\pm\Delta} \end{bmatrix}$ asociado al autovalor $\pm\Delta$ cumple la ecuación

$$\left(H \mp \Delta I\right)\bar{v}^{\pm\Delta} = \bar{0} \implies \begin{bmatrix} \mp\Delta & \Delta \\ \Delta & \mp\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\pm\Delta} \\ v_2^{\pm\Delta} \end{bmatrix} = \bar{0} \implies \begin{bmatrix} v_2^{\pm\Delta} \mp v_1^{\pm\Delta} \\ v_1^{\pm\Delta} \mp v_2^{\pm\Delta} \end{bmatrix} = \bar{0}\,.$$

Esto nos da dos ecuaciones que son dependientes entre sí, por lo que basta mirar sólo una de ellas: $v_2^{\pm\Delta} = \pm v_1^{\pm\Delta}$. Tomando $v_1^{\pm\Delta}$ real y normalizando el autovector (es decir, imponiendo que valga $\left(v_1^{\pm\Delta}\right)^2 + \left(v_2^{\pm\Delta}\right)^2 = 1$), obtenemos

$$\bar{v}^{\pm\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Resumiendo entonces: los niveles de energía del sistema son $\{\Delta, -\Delta\}$ y los autoestados correspondientes son, en notación de Dirac, $|\pm\Delta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|R\rangle \pm |L\rangle\right)$.

(b) Si a $t = 0$ la partícula está del lado derecho con certeza. ¿Cuál es la probabilidad de observar a la partícula en el lado izquierdo como función del tiempo?

El estado del sistema a tiempo $t = 0$ es

$$|\psi(0)\rangle = |R\rangle\ .$$

Para hallar la probabilidad de encontrar a la partícula en el lado izquierdo como función del tiempo hay que calcular

$$P_{|L\rangle}(t) = \left|\langle L|\,\psi(t)\rangle\right|^2\ .$$

Necesitamos entonces hallar la evolución temporal del estado $|\psi(0)\rangle$. Como el Hamiltoniano no depende del tiempo, el operador de evolución temporal es simplemente $U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$. Vamos a calcular entonces

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)\,|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\,|R\rangle \ .$$

Para seguir con la cuenta resulta más sencillo expresar a $|R\rangle$ en término de los autoestados de H, ya que sabemos cómo actúa $e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ sobre ellos: $e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\,|\pm\Delta\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}t(\pm\Delta)}\,|\pm\Delta\rangle$. Es sencillo ver que

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Delta\rangle + |{-\Delta}\rangle\right) ,$$

con lo que

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\,|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\left(|\Delta\rangle + |{-\Delta}\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}t\Delta}\,|\Delta\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}t\Delta}\,|{-\Delta}\rangle\right) .$$

Insertando este último resultado en la expresión para la probabilidad y usando que

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Delta\rangle - |{-\Delta}\rangle\right) ,$$

el cálculo de la probabilidad da

$$P_{|L\rangle}(t) = |\langle L|\,\psi(t)\rangle|^2 = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) .$$

Este resultado es consistente con el hecho de que a $t=0$ el estado del sistema es ortogonal a $|L\rangle$. Si se calcula $P_{|R\rangle}(t) = \cos^2\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)$ vemos además que se verifica que $P_{|R\rangle}(t) + P_{|L\rangle}(t) = 1$ a todo tiempo, como es de esperar.

(c) Mostrar que

$$H = \Delta\,|L\rangle\,\langle R| \ ,$$

no es un Hamiltoniano admisible. Para ello, resuelva el problema de evolución temporal más general con este Hamiltoniano y muestre que se viola la conservación de la probabilidad. ¿Qué propiedad/es no satisface este H y por qué esto implica la no conservación de la probabilidad?

El problema de evolución temporal más general para este sistema se resuelve considerando un estado inicial genérico, que se puede escribir en términos de la base del espacio de Hilbert $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ como

$$|\varphi(0)\rangle = a\,|L\rangle + b\,|R\rangle \ ,$$

siendo a y b complejos tales que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

El estado a tiempo t se obtiene haciendo

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}\left(a\,|L\rangle + b\,|R\rangle\right) = \left(1 - \frac{it}{\hbar}H\right)\left(a\,|L\rangle + b\,|R\rangle\right) = a\,|L\rangle + b\,|R\rangle - \frac{itb\Delta}{\hbar}\,|L\rangle \ ,$$

donde usamos que $e^{-\frac{i}{\hbar}tH} = 1 - \frac{it}{\hbar}H$ ya que $H^n = 0$ si $n \geq 2$. La expresión anterior resuelve el problema de evolución temporal más general para este sistema.

A tiempo $t > 0$ el estado $|\varphi(t)\rangle$ ya no tiene norma 1:

$$||\,|\varphi(t)\rangle|| = \sqrt{\langle\varphi(t)\,|\varphi(t)\rangle} = \sqrt{\left|a - \frac{itb\Delta}{\hbar}\right|^2 + |b|^2} = \sqrt{1 + \frac{t^2b^2\Delta^2}{\hbar^2}} > 1\,.$$

Esto está asociado al hecho de que $H = \Delta |L\rangle \langle R|$ no es autoadjunto (ya que $H^\dagger = \Delta |R\rangle \langle L| \neq H$) y por ende el operador de evolución $U = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ de este sistema no es unitario. Por este motivo, la norma de un estado que inicialmente es 1 cambia en el tiempo, lo que genera conflictos con la conservación de la probabilidad (en este caso, vemos por ejemplo que $P_{|R\rangle}(t) + P_{|L\rangle}(t) = 1 + \frac{t^2 b^2 \Delta^2}{\hbar^2} > 1$).
Resumiendo: H no es admisible como Hamiltoniano porque no es autoadjunto (y por lo tanto no es un observable). Esto genera problemas dado que el operador de evolución asociado no es unitario y entonces la norma de los estados no se conserva en la evolución, llevando esto a la no conservación de la probabilidad.

$\boxed{2}$ Completando cuadrados en el hamiltoniano podemos reescribirlo como

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 - qEx = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 \left(x - \frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{E^2q^2}{2m\omega^2}. \tag{1}$$

Si definimos entonces el operador

$$x' := x - \frac{Eq}{m\omega^2} \tag{2}$$

tenemos que x' y p satisfacen las relaciones de conmutación canónicas

$$[x', p] = \left[x - \frac{Eq}{m\omega^2}, p\right] = [x, p] + \cancel{\left[-\frac{Eq}{m\omega^2}, p\right]} = i\hbar \tag{3}$$

y que el hamitoniano corresponde al de un oscilador armónico en estas variables canónicas

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x'^2 - \frac{E^2q^2}{2m\omega^2}. \tag{4}$$

Definiendo los operadores de creación y aniquilación para estas variables

$$\begin{aligned} a' &:= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x' + \frac{i}{m\omega}p\right) \\ a'^{\dagger} &:= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x' - \frac{i}{m\omega}p\right), \end{aligned} \tag{5}$$

el hamitoniano se puede escribir como

$$H = \hbar\omega a'^{\dagger} a' - \frac{E^2q^2}{2m\omega^2} \tag{6}$$

cuyo estado fundamental es el $|0'\rangle$ tal que

$$a'|0'\rangle = 0. \tag{7}$$

Para probar que este estado es coherente tenemos que mostrar que es autoestado del operador de aniquilación a dado por

$$a := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right). \tag{8}$$

Para eso podemos escribir al operador prima como

$$a' = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x' + \frac{i}{m\omega}p\right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{Eq}{m\omega^2} + \frac{i}{m\omega}p\right) = a - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{Eq}{m\omega^2} \tag{9}$$

y reemplazando tenemos

$$0 = a'|0'\rangle = \left(a - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{Eq}{m\omega^2}\right)|0'\rangle \implies a|0'\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{Eq}{m\omega^2}|0'\rangle \tag{10}$$

que prueba lo que buscábamos.
b) Para obtener la relación de incerteza necesitamos

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \tag{11}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2. \tag{12}$$

Calculamos entonces cada valor medio por separado sobre el estado $|0'\rangle$. Pero sobre este estado sabemos cómo actúa a por la ecuación (13), entonces escribimos a x y p en términos de a y $a^\dagger$como

$$a + a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \cancel{\frac{i}{m\omega}p}\right) + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \cancel{\frac{i}{m\omega}p}\right) = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x \tag{13}$$

$$\implies x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \tag{14}$$

y análogamente

$$p = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger). \tag{15}$$

Así podemos calcular los valores medios

$$\langle 0'|x|0'\rangle = \langle 0'|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)|0'\rangle \tag{16}$$

por (13) tenemos que

$$\begin{aligned}\langle 0'|x|0'\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0'|\left(a|0'\rangle\right) + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle 0'|a^\dagger\right)|0'\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0'|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{Eq}{m\omega^2}|0'\rangle + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0'|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{Eq}{m\omega^2}|0'\rangle = \frac{Eq}{m\omega^2}.\end{aligned} \tag{17}$$

Los otros valores medios se pueden calcular de la misma forma

$$\begin{aligned}\langle 0'|x^2|0'\rangle &= \langle 0'|\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)\right]^2|0'\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0'|\left[a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a\right]|0'\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0'|\left[a^2 + a^{\dagger 2} + a^\dagger a + 1 + a^\dagger a\right]|0'\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\langle 0'|a^2|0'\rangle + \langle 0'|a^{\dagger 2}|0'\rangle + \langle 0'|2a^\dagger a|0'\rangle + 1\right] \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\frac{m\omega}{2\hbar}\left(\frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2\langle 0'|0'\rangle + \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2\langle 0'|0'\rangle + 2\frac{m\omega}{2\hbar}\left(\frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2\langle 0'|0'\rangle + 1\right] \\ &= \left(\frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2 + \frac{\hbar}{2m\omega}.\end{aligned} \tag{18}$$

Además tenemos

$$\begin{aligned}\langle 0'|p|0'\rangle &= \langle 0'|\frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger)|0'\rangle \\ &= \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\langle 0'|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{Eq}{m\omega^2}|0'\rangle - \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\langle 0'|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\frac{Eq}{m\omega^2}|0'\rangle = 0\end{aligned} \tag{19}$$

Y por último

$$\begin{aligned}
\langle 0'|p^2|0'\rangle &= \langle 0'|\left[\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a-a^\dagger)\right]^2|0'\rangle \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left[\langle 0'|a^2|0'\rangle + \langle 0'|a^{\dagger 2}|0'\rangle - \langle 0'|2a^\dagger a|0'\rangle + 1\right] \\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left[\frac{m\omega}{2\hbar}\left(\frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2\langle 0'|0'\rangle + \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2\langle 0'|0'\rangle - 2\frac{m\omega}{2\hbar}\left(\frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2\langle 0'|0'\rangle - 1\right] \\
&= \frac{\hbar m\omega}{2}. \qquad (20)
\end{aligned}$$

Así encontramos que las varianzas son

$$\begin{aligned}
(\Delta x)^2 &= \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \left(\frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2 + \frac{\hbar}{2m\omega} - \left(\frac{Eq}{m\omega^2}\right)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \\
(\Delta p)^2 &= \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{m\omega\hbar}{2} \qquad (21)
\end{aligned}$$

Entonces encontramos que se satura la relación de incerteza

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\frac{m\omega\hbar}{2} = \frac{\hbar^2}{4}. \qquad (22)$$

$\boxed{3}$ Tenemos que la función de onda de un electrón, ignorando su espín, está dada por

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(e^{i\phi}\text{sen}\theta + \cos\theta)g(r)$$

con $\int_0^\infty |g(r)|^2 r^2 dr = 1$

(a) Para hallar los valores que se pueden obtener al medir L^2, es conveniente escribir la parte angular de la función de onda en términos de los armónicos esféricos $Y_m^l(\theta,\phi)$, dado que estos son autofunciones de L^2 con autovalor $\hbar l(l+1)$ Sabiendo que

$$Y_0^1(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$
$$Y_1^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\text{sen}\theta e^{i\phi}$$

Es sencillo ver que la función de onda se puede escribir de la siguiente manera

$$\psi(\vec{r}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}Y_0^1(\theta,\phi) - \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1(\theta,\phi)\right)g(r)$$

La función de onda debe estar normalizada. En este caso es sencillo ver que lo está,

$$\int |\psi|^2 r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\phi =$$
$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{3}}Y_0^1(\theta,\phi) - \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1(\theta,\phi)\right)^* \left(\frac{1}{\sqrt{3}}Y_0^1(\theta,\phi) - \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1(\theta,\phi)\right)\text{sen}\theta d\theta d\phi = 1$$

Pues los armónicos esféricos están normalizados y la suma de los factores multiplicativos es 1.

Dado que es posible escribir a la función de onda en términos de los armónicos esféricos con $l = 1$, y el operador L^2 actúa sólo sobre la parte angular de la misma, al medir L^2 el único valor posible será $2\hbar$ con probabilidad $P(l = 1) = 1$.

(b) Para no trabajar con integrales podemos usar la notación de Dirac. Hay que notar que

$$|\psi\rangle = |g\rangle \otimes |l\ m\rangle$$

Donde $g(r) = \langle \hat{r}|g\rangle$ y $Y_m^l(\theta,\phi) = \langle \hat{n}|l\ m\rangle$

De esta forma, podemos escribir

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|1\ 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\ 1\rangle\right) \otimes |g\rangle$$

Como el operador L_z actúa sólo sobre la parte angular, podemos trabajar solamente con la parte angular de $|\psi\rangle$, la llamamos $|f\rangle$. Los estados $|l\ m\rangle$ son autoestados del operador L_z con autovalor $m\hbar$. De esta forma, los posibles valores de L_z que se obtienen al medir son 0 y $\hbar$. Las probabilidades de cada uno son

$$P(0) = |\langle 1\ 0|1\ 0\rangle|^2 = \frac{1}{3}$$
$$P(\hbar) = |\langle 1\ 1|1\ 1\rangle|^2 = \frac{2}{3}$$

(c) El valor de expectación de L_z a $t = 0$ lo calculamos como $\langle f|L_z|f\rangle$. Tenemos que

$$L_z|f\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar|1\ 1\rangle$$

$$\langle L_z\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1\ 0| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1\ 1|\right)\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar|1\ 1\rangle\right) = \frac{2}{3}\hbar$$

(d) Si a $t = 0$ se mide L_z y se obtiene el mayor valor posible, el estado luego de la medición será $|\tilde{f}\rangle = |1\ 1\rangle$, que corresponde con un estado normalizado. Para hallar el valor de expectación de L_y es conveniente escribirlo usando las relaciones de conmutación

$$L_y = \frac{i}{\hbar}(L_xL_z - L_zL_x)$$

De esta forma resulta sencillo calcular el valor de expectación $\langle\tilde{f}|L_y|\tilde{f}\rangle$

$$\begin{aligned}\langle L_y\rangle &= \frac{i}{\hbar}(\langle 1\ 1|L_xL_z|1\ 1\rangle - \langle 1\ 1|L_zL_x|1\ 1\rangle)\\ &= i(\langle 1\ 1|L_x|1\ 1\rangle - \langle 1\ 1|L_x|1\ 1\rangle) = 0\end{aligned}$$

Resolución Ejercicio 4 (a) primer parcial.

Franco Mayo.

October 29, 2021

Enunciado

(Verdadero o falso): Sea $\mathcal{H}$ el espacio de Hilbert de cierto sistema. No existe un operador unitario U actuando sobre $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ tal que resulte

$$U\,(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle$$

para todos los $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ de $\mathcal{H}$.

Resolución

Este enunciado es **VERDADERO** y es conocido como el Teorema de no clonado. Vamos a demostrarlo por el absurdo.

Supongamos que el operador U del enunciado existe. Tenemos entonces que para los estados $|\psi\rangle, |\xi\rangle, |\phi\rangle$ se cumple

$$U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \tag{1}$$

$$U(|\xi\rangle \otimes |\phi\rangle) = |\xi\rangle \otimes |\xi\rangle \tag{2}$$

Calculemos entonces el siguiente producto interno:

$$(\langle\psi| \otimes \langle\phi|)\,(|\xi\rangle \otimes |\phi\rangle) = \langle\psi|\xi\rangle\,\langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|\xi\rangle \tag{3}$$

Este producto interno puede ser calculado de la siguiente forma:

$$(\langle\psi| \otimes \langle\phi|)\,(|\xi\rangle \otimes |\phi\rangle) = (\langle\psi| \otimes \langle\phi|)\,\underbrace{U^\dagger U}_{\mathbb{1}}(|\xi\rangle \otimes |\phi\rangle) = \langle\psi| \otimes \langle\psi|\xi\rangle \otimes |\xi\rangle = |\,\langle\psi|\xi\rangle\,|^2 \tag{4}$$

Como los productos internos calculados en (3) y (4) son los mismos, obtenemos que se debe cumplir la siguiente igualdad

$$\langle\psi|\xi\rangle = |\,\langle\psi|\xi\rangle\,|^2. \tag{5}$$

Esto puede suceder en dos situaciones distintas, cuando $\langle\psi|\xi\rangle = 1$ o $\langle\psi|\xi\rangle = 0$. Vemos entonces que no se puede clonar cualquier estado, sino que se puede construir un operador U que me permita clonar únicamente estados que sean ortogonales. Entonces, como el enunciado nos dice que no existe un operador U que permita clonar *todos* los estados, concluímos que es verdadero.

Otra demostración diferente, basada en la linealidad de los operadores unitarios se encuentra en la página 209 del libro de Ballentine.

Para terminar, les dejo un link a un artículo corto de la revista *Physics Today* escrito por Wooters y Zurek, quienes demostraron el teorema de no clonado, donde discuten brevemente el teorema y sus implicancias para la criptografía cuántica:Wooters-Zurek-NoCloningTheorem

$\boxed{4}$ (b) La degeneración del nivel con energía $E = 5\hbar\omega/2$ de un oscilador armónico tridimensional isotrópico de frecuencia ω es 2

El enunciado es **Falso**. El hamiltoniano del oscilador armónico tridimensional isótropo es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z.$$

Como el operador puede separarse en 3 contribuciones distintas en cada una de las direcciones, y

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j} \quad [q_i, q_j] = 0 \quad [p_i, p_j] = 0,$$

el problema se reduce a resolver tres osciladores armónicos en una dimensión. Podemos definir los operadores de creación y destrucción para cada una de las direcciones y reescribir el hamiltoniano como

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N}_x + \hat{N}_y + \hat{N}_z + \frac{3}{2}\right).$$

Los autoestados entonces son

$$|n_x, n_y, n_z\rangle \quad n_i \in \mathbb{N}_0$$

y los autovalores

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right).$$

Si la energía es $E = 5\hbar\omega/2$, entonces $n_x + n_y + n_z = 1$ por lo que los estados

$$\begin{gathered} |1,0,0\rangle \\ |0,1,0\rangle \\ |0,0,1\rangle \end{gathered} \tag{1}$$

tienen esa energía. La degeneración entonces es $g = 3 \neq 2$.

Ejercicio 4(c) - Resuelto por Mateo Koifman

FALSO. Tenemos que $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$, es decir, los operadores no conmutan. Por lo tanto no hay ninguna base que los diagonalice simultáneamente. Otra alternativa también válida era calcular el conmutador y ver que se anulaba.

Si se quiere, podemos justificar que en cualquier base $J_z \neq 0$ (siempre y cuando $j \neq 0$). Por ejemplo, podemos argumentar que J_z no tendría los autovalores que esperamos para $j = 3/2$, o bien que $J_z = 0 \Rightarrow [J_\pm, J_z] = 0 \Rightarrow J_\pm = 0$, en contradicción con el resultado que obtenemos si calculamos directamente $J_\pm = J_x \pm i J_y$.