$\boxed{4}$ En este ejercicio nos piden hallar los niveles de energía para una partícula libre de masa m en un anillo de perímetro L.

Como la partícula vive en un anillo vamos a describir el problema utilizando coordenadas cilíndricas, y nuestra función de onda va a ser $\psi(\vec{r}) = \psi(\theta)$, ya que el radio del anillo se mantiene constante y podemos elegir que el anillo se encuentre en el plano $z = 0$. Veamos entonces la ecuación de Schrödinger para una partícula libre:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}).$$

Como dijimos que vamos a trabajar en coordenadas cilíndricas, repasamos el laplaciano para estas coordenadas:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Antes de reemplazar todo esto en la ecuación de Schrödinger nos fijamos que por la geometría del problema la única derivada no nula va a ser la que se toma con respecto a θ, por lo tanto el problema se simplifica notablemente. Tenemos entonces:

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2\psi(\theta)}{\partial\theta^2} = E\,\psi(\theta)$$

Donde R es el radio del anillo $R = L/2\pi$. Esto lo podemos reescribir como

$$\frac{\partial^2\psi(\theta)}{\partial\theta^2} = -\underbrace{\frac{2mR^2}{\hbar^2}E}_{k^2}\,\psi(\theta)$$

Obtenemos entonces la solución (estacionaria) para la partícula libre:

$$\psi(\theta) = A\,e^{i\frac{\sqrt{2mE}R}{\hbar}\theta} \tag{1}$$

Y esto es algo muy similar a lo que obtenemos en el caso de la partícula libre en el espacio que ya estudiamos, pero debemos recordar que ahora tenemos una condición extra, que es que la partícula se encuentra en un anillo. El hecho de que se encuentre confinada hace que el resultado final sea notablemente diferente que el de la partícula libre en el espacio. En particular, en este caso la condición extra que aparece es que $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\,\pi\,n)$, donde n es un número entero. Esto es así porque los puntos físicos que representan en el espacio estos dos ángulos coinciden, y entonces la función de onda que los describe debe ser la misma, como ya se dijo en clase, la función de onda debe ser univaluada. Reemplacemos esta condición en (1):

$$\psi(\theta + 2\pi\,n) = A\,e^{i\frac{\sqrt{2mE}R}{\hbar}\theta}\,e^{i\frac{\sqrt{2mE}R}{\hbar}2\pi\,n} = \psi(\theta) = A\,e^{i\frac{\sqrt{2mE}R}{\hbar}\theta},$$

de donde deducimos que

$$e^{i\frac{\sqrt{2mE}R}{\hbar}2\pi\,n} = 1$$

y por lo tanto

$$\frac{\sqrt{2mE}R}{\hbar}n = 1 \tag{2}$$

Despejando la energía finalmente llegamos a

$$E = \frac{\hbar^2\,n^2}{2mR^2} \tag{3}$$

Los niveles de energía se encuentran discretizados. Esto es interesante, ya que en los ejemplos que discutimos en clase donde aparecían niveles discretizados siempre era en sistemas donde había algún pozo de pontencial y obteníamos soluciones de estados ligados. Pero en este caso estamos estudiando una partícula libre, por lo que no hay ningún potencial. Sin embargo la partícula se encuentra confinada. Vemos entonces que en dos casos que en principio parecen muy diferentes obtenemos un efecto similar, al confinar la partícula en una región reducida del espacio el espectro de energías se vuelve discreto. En un caso es aplicando un potencial, en este es mediante las condiciones de contorno.

Este efecto es importante porque aún cuando estudiamos partículas libres, en la realidad siempre las estudiamos confinadas en el espacio, ya sea en una caja o en el laboratorio, y por lo tanto tenemos que considerar entonces las condiciones de contorno del sistema. Se puede pensar por ejemplo que si yo quiero estudiar una partícula atrapada en una caja puedo describir la caja como distintas barreras de potencial, prohibiendo que la partícula salga; otra solución que suele usarse para describir una partícula confinada en una caja es aplicar lo que se llama condiciones periódicas de contorno, en las cuales $\psi(x + L) = \psi(x)$, que es básicamente lo que sucede en este problema. Usando condiciones de contorno periódicas se puede describir entonces al sistema confinándolo de cierto modo en la caja, y se obtiene una buena aproximación siempre y cuando uno estudie el comportamiento lejos de los bordes. Quienes hayan cursado Física Teórica 3 ya se habrán encontrado con esta forma de tratar los problemas.

En resumen, al haber confinado la partícula a una región del espacio (un anillo en este caso) encontramos que la solución de partícula libre ya no tiene un espectro continuo, sino que los niveles de energía se encuentran discretizados.