

As far as laws of mathematics refer to reality, they are not certain; and as far as they are certain, they do not refer to reality.

*A. Einstein.*

En esta guía trataremos algunos aspectos básicos de análisis funcional que serán útiles a lo largo del curso.

**9 Notación de Dirac.** Sea  $T_v$  el funcional asociado al vector  $|v\rangle$  por el lema de Riesz. Probar que

- (a)  $T_{|v\rangle+|w\rangle} = \langle v| + \langle w|$ .
- (b)  $T_{\alpha|v\rangle} = \alpha^* \langle v|$ .

**10 Propiedades del conmutador.**

Pruebe las siguientes identidades para operadores  $A, B, C$  en cierto espacio de Hilbert, con  $[A, B] := AB - BA$  y  $\{A, B\} := AB + BA$ .

- (a)  $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$  (identidad de Jacobi).
- (b)  $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$ .
- (c)  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ .
- (d)  $[A, B] = \{A, B\} - 2BA$ .
- (e)  $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ .
- (f)  $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$  si  $[B, [A, B]] = 0$ .
- (g)  $[f(A), B] = f'(A)[A, B]$  para toda  $f$  analítica.

**11 Exponencial de un operador** Dado un operador  $A$ , se define formalmente la exponencial de  $A$  como

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Compruebe que  $e^{\lambda A}$  es la solución a la ecuación diferencial  $h'(\lambda) = Ah(\lambda)$ . Además, que si  $A$  y  $B$  conmutan con  $[A, B]$ , entonces

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2}.$$

Esta es una de las relaciones que se desprenden de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Ayuda: considere la función<sup>2</sup>  $g(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{-\lambda(A+B)}$ , demuestre que la misma satisface la ecuación diferencial  $\frac{dg}{d\lambda} = \lambda[A, B]g$  y posteriormente resuelva dicha ecuación diferencial.

**IMPORTANTE:** Notar que, en general,  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ .

**12 ¿Verdadero o falso?**

- (a) La traza de un operador depende de la base en la que se escribe el mismo.
- (b)  $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$ , donde  $X$  e  $Y$  son operadores.
- (c)  $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$ .

<sup>2</sup>Esta es una función que toma un número real y lo manda a un operador, es decir, es una función con valores en operadores. Su imagen se puede pensar como una curva en el espacio de operadores.

- (d) Si  $A$  es un operador hermítico con desarrollo espectral  $A = \sum_i a_i |i\rangle \langle i|$  y  $f$  una función analítica, entonces  $f(A) = \sum_i f(a_i) |i\rangle \langle i|$ .
- (e)  $|i\rangle$  y  $|j\rangle$  son autoestados de cierto operador hermítico  $A$ . Entonces,  $|i\rangle + |j\rangle$  también es autoestado de  $A$ .
- (f) Si dos observables  $A$  y  $B$  tienen los mismos autovectores  $\{|i\rangle\}$  y el conjunto  $\{|i\rangle\}$  es una base ortonormal del espacio de Hilbert, entonces  $[A, B] = 0$ .
- (g) Si dos operadores hermíticos anticonmutan, entonces es posible hallar un autoestado común a ambos operadores.
- (h) El producto interno entre dos vectores no cambia cuando a ambos se los transforma con el mismo operador unitario.

**13** **Matrices de Pauli.** En un espacio vectorial  $V$  de dimensión 2 considere los operadores  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , que en la base ortonormal  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  de  $V$ , con

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se representan mediante las matrices

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estas tres matrices se conocen como *matrices de Pauli*.

- (a) ¿Son estas matrices hermíticas? Hallar sus autovalores y autovectores en esta base.
- (b) Verifique que se satisfacen las siguientes propiedades

$$\det(\sigma_k) = -1, \quad \text{Tr}(\sigma_k) = 0, \quad \sigma_i^2 = I;$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}I, \quad \sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{jkl}\sigma_l + I\delta_{jk},$$

donde  $I$  representa a la matriz identidad,  $k = 1, 2, 3 (\equiv x, y, z)$ ,  $\epsilon_{ijk}$  es la densidad tensorial de Levi-Civita, y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. En la última identidad se utiliza la notación de suma sobre índices repetidos.

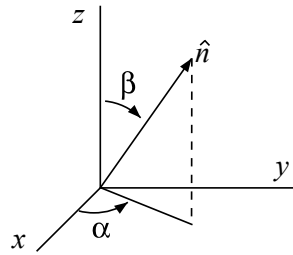
**14** **Espín 1/2.** Como veremos más adelante en el curso para sistemas de espín 1/2 el operador de espín,  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ , se puede representar usando las matrices de Pauli tomando  $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$  ( $j = x, y, z$ ).

- (a) Probar que  $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$ .
- (b) Demostrar que, en la base de autovectores de  $S_z$   $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  (correspondientes a los autovalores  $\hbar/2$  y  $-\hbar/2$ , respectivamente), la representación de las componentes del operador de espín está dada por

$$S_x = \frac{\hbar}{2} [|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|], \quad S_y = \frac{i\hbar}{2} [-|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|], \quad S_z = \frac{\hbar}{2} [|+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|].$$

- (c) Escribir los autovectores de  $S_x$  en términos de los de  $S_z$ .
- (d) Construya, en término de los autovectores de  $S_z$ , un estado  $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle$  tal que

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle = \frac{\hbar}{2} |\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle$$



donde  $\hat{\mathbf{n}}$  está caracterizado por los ángulos que se muestran en la figura.

*Nota: la respuesta es  $|\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}; +\rangle = \cos(\beta/2) |+\rangle + \sin(\beta/2)e^{i\alpha} |-\rangle$ . En lugar de verificar que esta respuesta satisface la ecuación de autovalores de arriba, resuelva el problema de autovalores planteado. Más adelante veremos una forma más simple de obtener este resultado.*

15 Dada la matriz  $J = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ :

(a) Pruebe que  $J$  es unitaria y halle  $J^{-1}$ .

(b) Aplique la transformación  $B = JAJ^{-1}$  a una matriz simétrica  $A$  y verifique que: (i)  $B$  es simétrica, (ii)  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ . En general, la transformación  $A \mapsto JAJ^{-1}$  por una  $J$  unitaria se conoce como conjugación.

16 Considere un espacio de Hilbert de dimensión 3.  $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$  es una base de vectores ortonormales, y en dicha base dos operadores  $A$  y  $B$  se representan por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}$$

donde  $a$  y  $b$  son reales.

(a) En la representación anterior es sencillo notar que  $A$  tiene un espectro degenerado. ¿Lo es también el de  $B$ ?

(b) Mostrar que  $A$  y  $B$  conmutan.

(c) Encontrar un nuevo conjunto de estados ortonormales que sean autoestados simultáneos de  $A$  y  $B$ . Especificar los autovalores de  $A$  y  $B$  para cada uno de los tres autovectores. ¿Es posible caracterizar completamente a cada autovector por la especificación de estos autovalores?

17 Dos observables  $A_1$  y  $A_2$ , que no involucran explícitamente el tiempo, no conmutan ( $[A_1, A_2] \neq 0$ ), pero se sabe que ambos conmutan con el hamiltoniano ( $[A_1, H] = [A_2, H] = 0$ ). Pruebe que debe haber alguna degeneración en los autoestados de energía. Como un ejemplo, puede pensar en el problema de fuerzas centrales  $H = p^2/2m + V(r)$ , con  $A_1 \rightarrow L_z$  y  $A_2 \rightarrow L_x$ .

18 **Relación de incerteza generalizada.**

(a) Una forma relativamente sencilla de derivar la desigualdad de Schwarz es la siguiente. Primero observe que

$$(\langle \alpha | + \lambda^* \langle \beta |) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle) \geq 0$$

para cualquier número complejo  $\lambda$ . Luego, elija  $\lambda$  de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz,  $\langle \alpha | \alpha \rangle \langle \beta | \beta \rangle \geq |\langle \alpha | \beta \rangle|^2$ .

- (b) Para dos observables  $A$  y  $B$  y un estado cualquiera, demostrar la relación de incerteza de Schrödinger,

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle\{A, B\}\rangle - 2\langle A\rangle\langle B\rangle|^2,$$

donde  $\Delta A = A - \langle A \rangle$ . Note que la relación de incerteza de Heisenberg se desprende de ésta.

- (c) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene si el estado en cuestión satisface

$$\Delta A |\psi\rangle = \lambda \Delta B |\psi\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Además, concluya que si  $\lambda$  es un imaginario puro entonces se obtiene la igualdad en la relación de incerteza de Heisenberg.

- (d) Verificar la relación de incerteza para los operadores  $A = S_x$  y  $B = S_y$ , en el estado  $|S_x = +\rangle$ .

**19 Operador de posición en la representación de impulso.** Probar que

- (a)  $\langle p' | \hat{x} | \alpha \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \langle p' | \alpha \rangle$ .  
(b)  $\langle \beta | \hat{x} | \alpha \rangle = \int dp' \beta(p')^* \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial p'} \right) \alpha(p')$ .

**20 Operador de traslación espacial.** El operador de traslación para un desplazamiento espacial  $\mathbf{a}$  finito está dado por

$$\mathcal{T}(\mathbf{a}) = \exp\left(\frac{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}}{\hbar}\right)$$

donde  $\mathbf{p}$  es el operador impulso.

- (a) Evalúe  $[x_i, \mathcal{T}(\mathbf{a})]$ .  
(b) Muestre que  $\mathcal{T}$  es un operador unitario usando que  $\mathbf{p}$  es hermítico.  
(c) Usando los puntos anteriores, encuentre cómo cambia el valor de expectación  $\langle \mathbf{x} \rangle$  frente a traslaciones (es decir, cuando el estado en cuestión pasa de ser  $\psi$  a su trasladado  $\mathcal{T}(\mathbf{a})\psi$ ). El resultado justifica interpretar a  $\mathcal{T}(\mathbf{a})$  como el operador de traslaciones espaciales.