12 Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar.

(a) La traza de un operador depende de la base en la que se escribe el mismo.

Este enunciado es FALSO. Sean $[A]_B$ y $[A]_{B'}$ las matrices que representan a cierto operador A en las bases B y B'. Si $C_{B\to B'}$ es la matriz de cambio de base de B a B', se tiene

$$[A]_{B'} = C_{B\to B'}[A]_{B'}C^{-1}_{B\to B'}\,,$$

con lo que si elegimos la base B' la traza del operador queda[1]

$$\mathrm{Tr}\,A = \mathrm{tr}\,[A]_{B'} = \mathrm{tr}\,\left(C_{B\to B'}[A]_{B'}C^{-1}_{B\to B'}\right) = \mathrm{tr}\,\left(C^{-1}_{B\to B'}C_{B\to B'}[A]_{B'}\right) = \mathrm{tr}\,([A]_{B'})\,,$$

donde la segunda igualdad sale de la propiedad de ciclidad de la traza de matrices. Vimos entonces que $\mathrm{tr}\,[A]_{B'} = \mathrm{tr}\,[A]_B$, lo que nos dice que la traza de un operador no depende de la base elegida.

(b) $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, donde X e Y son operadores.

Este enunciado es VERDADERO. Sean $[X]_B$ e $[Y]_{B'}$ las matrices que representan a X e Y en cierta base B. Tenemos entonces

$$\mathrm{Tr}\,(XY) = \mathrm{tr}\,([XY]_B) = \mathrm{tr}\,([X]_B.[Y]_B) = \mathrm{tr}\,([Y]_B.[X]_B) = \mathrm{tr}\,([YX]_B) = \mathrm{Tr}\,(YX)\,.$$

(c) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

Este enunciado es VERDADERO. Recordemos que $A^\dagger$ es tal que $\langle u|\,A^\dagger\,|v\rangle = \langle v|\,A\,|u\rangle^*$ para todo $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en el espacio de Hilbert. Veamos entonces si resulta cierto que $\langle u|\,Y^\dagger X^\dagger\,|v\rangle = \langle v|\,XY\,|u\rangle^*$, para todo $|u\rangle$ y $|v\rangle$. Para ello, vamos a necesitar utilizar una base ortonormal $\{|\alpha\rangle\}$ del espacio de Hilbert. Recuerden que vimos en clase que en ese caso $\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}$ es el operador identidad. Veamos entonces la cuenta

$$\begin{aligned}
\langle u|\,Y^\dagger X^\dagger\,|v\rangle &= \langle u|\,Y^\dagger \mathbb{1} X^\dagger\,|v\rangle = \langle u|\,Y^\dagger\left(\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\right)X^\dagger\,|v\rangle = \sum_\alpha \langle u|\,Y^\dagger\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,X^\dagger\,|v\rangle = \\
&= \sum_\alpha \langle\alpha|\,Y\,|u\rangle^*\langle v|\,X\,|\alpha\rangle^* = \left(\sum_\alpha \langle\alpha|\,Y\,|u\rangle\langle v|\,X\,|\alpha\rangle\right)^* = \\
&= \left(\sum_\alpha \langle v|\,X\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,Y\,|u\rangle\right)^* = \left[\langle v|\,X\left(\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\right)Y\,|u\rangle\right]^* = \\
&= \langle v|\,X\mathbb{1}Y\,|u\rangle^* = \langle v|\,XY\,|u\rangle^*\,,
\end{aligned}$$

para cualquier $|u\rangle$ y $|v\rangle$, como queríamos demostrar.

(d) Si A es un operador hermítico con desarrollo espectral $A = \sum_i a_i\,|i\rangle\langle i|$ y f una función analítica, entonces $f(A) = \sum_i f(a_i)\,|i\rangle\langle i|$.

Este enunciado es VERDADERO y la propiedad será de mucha utilidad a lo largo de todo el curso. Si f es analítica, entonces admite un desarrollo en serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n x^n$. Por definición, $f(A) = \sum_{n=0}^\infty f_n A^n$, pero entonces

[1] En este ejercicio vamos a utilizar Tr para hablar de traza de un operador y tr para referirnos a la traza de matrices. Cuando aparezca tr podemos utilizar todas las propiedades que ya conocemos sobre la traza de matrices.

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\sum_i a_i |i\rangle \langle i| \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n} |i_1\rangle \langle i_1| \dots |i_n\rangle \langle i_n| = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n} |i_1\rangle \delta_{i_1 i_2} \dots \delta_{i_{n-1} i_n} \langle i_n| = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sum_{i_1} a_{i_1}^n |i_1\rangle \langle i_1| = \\
&= \sum_{i_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n a_{i_1}^n \right) |i_1\rangle \langle i_1| = \sum_{i_1} f(a_{i_1}) |i_1\rangle \langle i_1| = \sum_i f(a_i) |i\rangle \langle i| \ .
\end{aligned}
$$

(e) $|i\rangle$ y $|j\rangle$ son autoestados de cierto operador hermítico A. Entonces, $|i\rangle + |j\rangle$ también es autoestado de A.

Este enunciado es FALSO. Como contraejemplo miren el caso de los autovectores de la matriz σ_z (queda para ustedes ya que es muy poco lo que hay que hacer).

(f) Si dos observables A y B tienen los mismos autovectores $\{|i\rangle\}$ y el conjunto $\{|i\rangle\}$ es una base ortonormal completa del espacio de Hilbert, entonces $[A, B] = 0$.

Este enunciado es VERDADERO. Sea $|v\rangle$ un vector arbitrario del espacio de Hilbert, que en términos de la base $\{|i\rangle\}$ se escribe como $v = \sum_i v_i |i\rangle$. Por hipótesis, como $|i\rangle$ es autovector de A y B, sabemos que $A|i\rangle = a_i |i\rangle$ y $B|i\rangle = b_i |i\rangle$ (donde a_i y b_i son números reales, ya que A y B son hermíticos, por ser observables). Haciendo actuar $[A, B]$ sobre $|v\rangle$ obtenemos entonces

$$
[A, B] |v\rangle = (AB - BA) \sum_i v_i |i\rangle = \sum_i v_i (AB - BA) |i\rangle = \sum_i (a_i b_i - b_i a_i) v_i |i\rangle = 0 \,,
$$

y como esto ocurre para $|v\rangle$ arbitrario, debe ser $[A, B] = 0$.

(g) Si dos operadores hermíticos anticonmutan, entonces es posible hallar un autoestado común a ambos operadores.

Este enunciado es FALSO. Vamos a verlo por el absurdo. Supongamos que el enunciado fuera en efecto cierto. Llamemos A y B a los operadores que anticonmutan y $|v\rangle$ al autoestado común a ambos, con lo que se tendría $A|v\rangle = a|v\rangle$ y $B|v\rangle = b|v\rangle$, para ciertos a y b reales. Como los operadores por hipótesis anticonmutan, se tendría

$$
\{A, B\} |v\rangle = (AB + BA) |v\rangle = 2ab |v\rangle = 0 \,.
$$

Esto implicaría entonces que a y/o b deberían anularse. Suponiendo que el enunciado es cierto, llegamos entonces a la conclusión de que alguno de los operadores debe tener algún autovalor nulo. Sin embargo, los operadores σ_x y σ_y son hermíticos y anticonmutan pero sus autovalores son ± 1 (o sea que no tienen autovalores nulos). Vemos entonces que haber asumido que el enunciado era cierto nos llevó a un absurdo. Por lo tanto, el enunciado debe ser falso.

(h) El producto interno entre dos vectores no cambia cuando a ambos se los transforma con el mismo operador unitario.

Este enunciado es VERDADERO. En efecto, si los vectores son $|v\rangle$ y $|w\rangle$, sus transformados por cierto operador unitario U están dados por $|v'\rangle = U|v\rangle$ y $|w'\rangle = U|w\rangle$. Entonces

$$
\langle v' | w' \rangle = \langle v | \underbrace{U^\dagger U}_{=I} | w \rangle = \langle v | w \rangle \ .
$$