$\boxed{17}$ Para demostrar lo que nos piden vamos a repasar algunas cosas que ya vimos cuando nos hablan de observables que conmutan, autoestados y autovalores (van a ver algunas cosas similares a lo que hicieron en la teórica). De esta forma vamos a poder escribir los operadores diagonalizados por bloques y luego vamos a probar lo que buscamos por el absurdo. Un resultado que nos va a ayudar en la demostración es:

Dos operadores A_1, H conmutan entre sí $\Rightarrow$ A_1 deja invariante los subespacios propios de H.

Esto quiere decir si $|\psi\rangle$ es autoestado de H también lo es $A_1 |\psi\rangle$, con el mismo autovalor. Si tienen una hoja a mano, lo pueden checkear en no más de una línea. Esto nos permite escribir a continuación a A_1 (y A_2) diagonales por bloques.

Digamos que H tiene autovalores E_j, cada uno con degeneración g_j (supongamos en principio $g_j \geq 1$). Llamamos además $\mathbb{1}_{g_j \times g_j}$ la matriz identidad de dimensión $g_j \times g_j$. Entonces, elegimos alguna base donde H sea diagonal, y la escribimos separando en los bloques asociados a sus correspondientes autovalores[1]

$$H = \begin{bmatrix} E_1 \mathbb{1}_{g_1 \times g_1} & 0 & 0 & \\ 0 & E_2 \mathbb{1}_{g_2 \times g_2} & 0 & \\ 0 & 0 & E_3 \mathbb{1}_{g_3 \times g_3} & \\ & & & \dots \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Es decir, H es obviamente diagonal según dijimos, pero de esta forma estamos separando en bloques de dimensión $g_1 \times g_1$, $g_2 \times g_2$, $g_3 \times g_3$, etc... correspondientes a sus autovalores E_1, E_2, E_3, etc... Ahora bien, que A_1 deje invariantes los subespacios propios de H quiere decir que A_1 "no mezcla bloques". O más propiamente, podemos decir que A_1 se escribe también diagonal en bloques de dimensión $g_j \times g_j$, igual que H (aunque estos bloques ya no necesariamente son proporcionales a la identidad ni tampoco diagonales). Por supuesto que lo mismo vale si tenemos otro operador A_2 que conmuta con H, así que escribimos

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} & 0 & 0 & \\ 0 & A_1^{(2)} & 0 & \\ 0 & 0 & A_1^{(3)} & \\ & & & \dots \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} A_2^{(1)} & 0 & 0 & \\ 0 & A_2^{(2)} & 0 & \\ 0 & 0 & A_2^{(3)} & \\ & & & \dots \end{bmatrix}. \tag{2}$$

con $A_{1,2}^{(j)}$ bloques de dimensión $g_j \times g_j$ respectivamente.

Intentemos ver qué pasa ahora con el conmutante $[A_1, A_2]$ teniendo los operadores escritos de esta forma. Para eso tenemos en cuenta la multiplicación de matrices por bloques y que A_1 y A_2 son además diagonales por bloques. Calculando $A_1 A_2$, $A_2 A_1$ y luego restando, pueden verificar que

$$[A_1, A_2] = \begin{bmatrix} \left[A_1^{(1)}, A_2^{(1)}\right] & 0 & 0 & \\ 0 & \left[A_1^{(2)}, A_2^{(2)}\right] & 0 & \\ 0 & 0 & \left[A_1^{(3)}, A_2^{(3)}\right] & \\ & & & \dots \end{bmatrix}. \tag{3}$$

[1] H es un observable, por lo que está garantizado que lo podemos escribir en su descomposición espectral.

Pensemos finalmente cómo podemos probar lo que nos piden. ¿Qué sucede si asumimos que H es no degenerado, es decir, todos los $g_j = 1$?. En tal caso si volvemos hacia atrás y vemos cómo escribimos H y después A_1, A_2, tenemos que todos los bloques $A_{1,2}^{(j)}$ van a ser "bloques"de 1×1. Es decir que cada $A_{1,2}^{(j)}$ no es más que un número complejo. La multiplicación de escalares siempre conmuta, por lo que $[A_1^{(j)}, A_2^{(j)}] = 0$ para todo j y $[A_1, A_2] = 0$.

Como conclusión de todo lo que hicimos, podemos afirmar entonces que si $[A_1, H] = [A_2, H] = 0$ y H es no degenerado, tenemos $[A_1, A_2] = 0$. Pero el enunciado nos decía además que $[A_1, A_2] \neq 0$. En consecuencia ahora vamos a llegar a un absurdo si asumimos que H es no degenerado. Entonces, finalmente podemos afirmar:

$$\text{Si } [A_1, H] = [A_2, H] = 0 \text{ y } [A_1, A_2] \neq 0,\ H \text{ es degenerado.}$$

Es otras palabras, existe algún $g_j > 1$ estrictamente. Al menos un bloque tendrá dimensión mayor o igual a 2×2 y ya NO podremos asegurar $[A_1^{(j)}, A_2^{(j)}] = 0$ para esos bloques.

Para cerrar y tener un ejemplo un poco más explícito en mente, pensemos en el problema de fuerzas centrales, con $A_1 = L_z$ y $A_2 = L_x$. Uno puede verificar que $[L_i, H] = 0$ cuando el potencial es central y $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$ (una forma de verlo es escribiendo $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$). Consideremos en particular el problema del átomo de Hidrógeno, donde sabemos que una base que diagonaliza el Hamiltoniano es $\{\varphi_{nlm}\}$. Explícitamente el Hamiltoniano es

$$H = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & \\ 0 & E_2\mathbb{1}_{4\times4} & 0 & \\ 0 & 0 & E_3\mathbb{1}_{9\times9} & \\ & & & \dots \end{bmatrix}. \tag{4}$$

- En el bloque 1 asociado a la energía E_1 existe 1 estado: $\{n = 1;\ l = m = 0\}$.
- En el bloque 2 asociado a la energía E_2 existen 4 estados: $\{n = 2;\ l = 0, 1;\ -l \leq m \leq l\}$.
- En el bloque 3 asociado a la energía E_3 existen 9 estados: $\{n = 3;\ l = 0, 1, 2;\ -l \leq m \leq l\}$.

Como $[L_x, H] = [L_z, H] = 0$ dejan invariantes los subespacios asociados a energías E_n o, en otras palabras, los elementos de matriz $\langle\varphi_{n'l'm'}|L_i|\varphi_{nlm}\rangle$ se anulan para $n \neq n'$, tenemos que L_x y L_z se escriben de la misma forma que dijimos para A_1 y A_2. En particular, los bloques tendrán dimensión 1×1, 4×4, 9×9, etc...

El bloque fundamental con $n = 1$ es no degenerado y $[L_x^{(1)}, L_z^{(1)}] = 0$, porque $L_x^{(1)}, L_z^{(1)}$ son escalares. De hecho $L_x^{(1)} = L_z^{(1)} = 0$ porque el estado fundamental no tiene momento angular. Sin embargo el bloque de primeros excitados $n = 2$ tiene 4 autoestados de energía degenerados y no podemos asegurar que $L_x^{(2)}$ y $L_z^{(2)}$ conmuten, ya que ahora son matrices de 4×4. De hecho, si pudiéramos calcular explícitamente los operadores en esta base encontraríamos $[L_x, L_z] = -i\hbar L_y$ que es distinto de cero. Lo que vemos es un ejemplo explícito de que la degeneración es una condición necesaria para que $[L_x, L_z] \neq 0$, cuando se cumple que $[L_x, H] = [L_z, H] = 0$.

De yapa para pensar: ¿existe una única base donde H, A_1, A_2 se escriban de la forma que dijimos, como en (1) y (2)? En el ejemplo del átomo de Hidrógeno, ¿$\{\varphi_{nlm}\}$ es la única?