18 Relación de incerteza generalizada

El ejercicio tiene como objetivo llegar a una expresión de la relación de incerteza generalizada para dos observables (operadores hermíticos). Es diferente a la que suele enunciarse, que es para la incerteza (o como le diría yo, desvío estándar), mientras que esta es para la varianza, (o el cuadrado de la incerteza).

(a) Una forma relativamente sencilla de derivar la desigualdad de Schwarz es la siguiente. Primero observe que

$$(\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle) \geq 0$$

para cualquier número complejo λ. Luego, elija λ de tal forma que la desigualdad anterior se reduzca a la desigualdad de Schwarz, $\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$

La combinación lineal de elementos de un espacio de Hilbert pertenece al mismo espacio, por lo que la expresión que nos muestra el enunciado $\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle)$ es la norma al cuadrado del elemento $(|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle)$. Expandamos la expresión para ver cómo puede ser un λ que nos sirva:

$$(\langle\alpha| + \lambda^* \langle\beta|) \cdot (|\alpha\rangle + \lambda |\beta\rangle) = \langle\alpha|\alpha\rangle + |\lambda|^2 \langle\beta|\beta\rangle + \lambda^* \langle\beta|\alpha\rangle + \lambda \langle\alpha|\beta\rangle$$

Podemos encontrar cuál es el λ que sirve multiplicando y dividiendo hasta que las cosas queden parecidas a las que queremos. Entonces como del otro lado hay un cero, multiplicamos por $\langle\beta|\beta\rangle$ que sabemos que es un número real y positivo (por ser la norma de $|\beta\rangle$) y despejamos para que nos quede a la izquierda lo mismo que en la desigualdad de Schwarz:

$$\begin{gathered}\langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle + |\lambda|^2 \langle\beta|\beta\rangle \langle\beta|\beta\rangle + \lambda^* \langle\beta|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle + \lambda \langle\alpha|\beta\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq 0 \\ \langle\alpha|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle \geq -(|\lambda|^2 \langle\beta|\beta\rangle \langle\beta|\beta\rangle + \lambda^* \langle\beta|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle + \lambda \langle\alpha|\beta\rangle \langle\beta|\beta\rangle)\end{gathered}$$

y resolviendo para que el lado derecho sea igual al de la expresión del enunciado,

$$\begin{aligned}-(|\lambda|^2 \langle\beta|\beta\rangle \langle\beta|\beta\rangle + \lambda^* \langle\beta|\alpha\rangle \langle\beta|\beta\rangle + \lambda \langle\alpha|\beta\rangle \langle\beta|\beta\rangle) &= |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \\ \lambda &= -\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\end{aligned}$$

Pueden reemplazar y chequear que efectivamente ese el λ que lleva de una expresión a la otra o resolver la última ecuación, lo que más les guste.

(b) Para dos observables A y B y un estado cualquiera, demostrar la relación de incerteza de Schödinger,

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{A,B\}\rangle - 2\langle A\rangle\langle B\rangle|^2$$

donde $\Delta A = A - \langle A\rangle$. Note que la relación de incerteza de Heisenberg se desprende de ésta.

Para demostrar la relación de incerteza, podemos usar la desigualdad de Schwarz escribiendo $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ en términos de los operadores y un estado genérico. El valor de expectación del observable $(\Delta A)^2$ para un estado $|\psi\rangle$ es:

$$\langle(\Delta A)^2\rangle = \langle\psi| (\Delta A)^2 |\psi\rangle = \langle\psi| \Delta A \Delta A |\psi\rangle ,$$

con $\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$. A es un operador hermítico, su valor de expectación es real y $\Delta A = A - \langle A\rangle$ también es hermítico. Entonces $\langle\psi|\,\Delta A = \langle\psi|\,\Delta A^\dagger$ por lo que $\langle(\Delta A)^2\rangle$ es el módulo al cuadrado de $\Delta A\,|\psi\rangle$. Lo mismo vale para $\langle(\Delta B)^2\rangle$, lo que nos permite reescribir la desigualdad del inciso a) en términos de estos nuevos estados haciendo el reemplazo

$$
\begin{aligned}
|\alpha\rangle &\to \Delta A\,|\psi\rangle \\
|\beta\rangle &\to \Delta B\,|\psi\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Entonces, haciendo uso de la desigualdad de Schwarz, podemos escribir la relación de incerteza para los operadores A y B.

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq |\langle\psi|\,\Delta A\Delta B\,|\psi\rangle|^2$$

La expresión a la que llegamos claramente no es la del enunciado, tenemos que reescribir el lado derecho.

$$
\begin{aligned}
\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle &= \langle\psi|(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)|\psi\rangle \\
\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle &= \langle\psi|AB|\psi\rangle - \langle\psi|A\,\langle B\rangle|\psi\rangle - \langle\psi|B\,\langle A\rangle|\psi\rangle + \langle A\rangle\,\langle\psi|B|\psi\rangle \\
\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle &= \langle\psi|AB|\psi\rangle - \langle B\rangle\,\langle A\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Si algún paso no les convence, recuerden que las constantes salen afuera del valor de expectación. Ahora el producto de operadores AB lo podemos escribir en términos de su conmutador y anti conmutador

$$AB = \frac{AB-BA}{2} + \frac{AB+BA}{2} = \frac{[A,B]}{2} + \frac{\{A,B\}}{2}.$$

Reemplazando en la expresión anterior

$$\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle = \frac{1}{2}\,\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle + \frac{1}{2}\,\langle\psi|\frac{\{A,B\}}{2}|\psi\rangle - \langle B\rangle\,\langle A\rangle\,.$$

El módulo al cuadrado queda entonces como

$$
\begin{aligned}
|\,\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle|^2 &= \langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle\;\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle^* \\
|\,\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle|^2 &= (\frac{1}{2}\,\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle + \frac{1}{2}\,\langle\psi|\{A,B\}|\psi\rangle - \langle B\rangle\,\langle A\rangle)\cdot \\
&\quad\cdot(\frac{1}{2}\,\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle^* + \frac{1}{2}\,\langle\psi|\{A,B\}|\psi\rangle^* - \langle B\rangle^*\langle A\rangle^*).
\end{aligned}
$$

A y B son observables por lo que sus valores de expectación son reales.
Además

$$\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle^* = \langle\psi|AB|\psi\rangle^* - \langle\psi|BA|\psi\rangle^* = \langle\psi|BA|\psi\rangle - \langle\psi|AB|\psi\rangle = -\,\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle\,.$$

De la misma forma pueden chequear que $\langle\psi|\{A,B\}|\psi\rangle^* = \langle\psi|\{A,B\}|\psi\rangle$.
Teniendo estas dos cosas en cuenta, la expresión para el lado derecho de la desigualdad se reduce a:

$$
\begin{aligned}
|\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle|^2 &= (\frac{1}{2}\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle\psi|\{A,B\}|\psi\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle)\cdot \\
&\cdot(-\frac{1}{2}\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle\psi|\{A,B\}|\psi\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle) \\
|\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle|^2 &= -\frac{1}{4}\langle[A,B]\rangle^2 + \frac{1}{4}\langle\{A,B\}\rangle^2 + \langle B\rangle^2\langle A\rangle^2 - \langle\{A,B\}\rangle\langle B\rangle\langle A\rangle
\end{aligned}
$$

Como A y B son hermíticos, vale que $[A,B] = iC$ con C un operador hermítico (esto se prueba parecido a otras cosas que ya probamos, escribiendo el conmutador explícito y calculando el adjunto). Entonces,

$$
-\frac{1}{4}\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle^2 = -(i)^2\langle\psi|C|\psi\rangle^2 = \langle\psi|C|\psi\rangle^2 = |\langle\psi|C|\psi\rangle|^2 = |\langle[A,B]\rangle|^2,
$$

ya que el valor de expectación de C es real.

Por otro lado, el anti conmutador de dos operadores hermíticos es también hermítico, por lo que su valor de expectación también es real. Podemos reescribir entonces

$$
\frac{1}{4}\langle\{A,B\}\rangle^2 + \langle B\rangle^2\langle A\rangle^2 - \langle\{A,B\}\rangle\langle B\rangle\langle A\rangle = \frac{1}{4}(\langle\{A,B\}\rangle - 2\langle B\rangle\langle A\rangle)^2 = \frac{1}{4}|\langle\{A,B\}\rangle - 2\langle B\rangle\langle A\rangle|^2
$$

Sustituyendo tenemos que,

$$
\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{A,B\}\rangle - 2\langle A\rangle\langle B\rangle|^2,
$$

que es exactamente lo que queríamos probar.

Como dice el enunciado, la relación de incerteza de Heisenberg se desprende de la de Schrödinger. Solo hace falta notar que $\frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{A,B\}\rangle - 2\langle A\rangle\langle B\rangle|^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$, ya que es la suma de dos números positivos. De ahí con tomar raíz tenemos que

$$
\sqrt{\langle\Delta A^2\rangle}\sqrt{\langle\Delta B^2\rangle} = \sigma_A\sigma_B \geq \sqrt{\frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2} = \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|
$$

(c) Muestre que el signo igual en la relación de incerteza generalizada se obtiene si el estado en cuestión satisface

$$
\Delta A|\psi\rangle = \lambda\Delta B|\psi\rangle, \quad \lambda\in\mathbb{C}.
$$

Además, concluya que si λ es un imaginario puro entonces se obtiene la igualdad en la relación de incerteza de Heisenberg.

Este inciso podemos probarlo para la expresión del a) de la desigualdad de Schwarz. Veamos que efectivamente, $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle = |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$ si $|\alpha\rangle = \lambda|\beta\rangle$:

$$
\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle|\lambda|^2\langle\alpha|\alpha\rangle = |\lambda|^2\langle\alpha|\alpha\rangle^2.
$$

Y por otro lado

$$
|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle = \lambda\langle\alpha|\alpha\rangle\lambda^*\langle\alpha|\alpha\rangle = |\lambda|^2\langle\alpha|\alpha\rangle^2.
$$

Entonces efectivamente, ambos lados de la desigualdad son iguales cuando $|\alpha\rangle = \lambda|\beta\rangle$. Si hacemos el mismo reemplazo que antes,

$$|\alpha\rangle \to \Delta A\,|\psi\rangle$$
$$|\beta\rangle \to \Delta B\,|\psi\rangle\,.$$

tenemos que si $\Delta A\,|\psi\rangle = \lambda\Delta B\,|\psi\rangle$, entonces

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle = \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{A,B\}\rangle - 2\langle A\rangle\langle B\rangle|^2,$$

ya que la relación de incerteza de Schrödinger es la desigualdad de Schwarz para $\Delta A\,|\psi\rangle$ y $\Delta B\,|\psi\rangle$.

Un comentario: ojo con la hipótesis del enunciado. Que $\Delta A\,|\psi\rangle = \lambda\Delta B\,|\psi\rangle$ no significa que $\Delta A = \lambda\Delta B$. De hecho fíjense que si esto fuese cierto, ΔA no sería hermítico, algo que usamos para todo lo que hicimos hasta este punto del ejercicio.

Por otro lado, el ejercicio nos pide que veamos que, si $\lambda = ic$ con $c \in \mathbb{R}$, vale la igualdad en la relación de incerteza de Heisenberg. Es decir, queremos ver que $\sigma_A\sigma_B = \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|$

Primero calculemos $\sigma_A\sigma_B$, teniendo en cuenta que

$\langle\psi|(\Delta A)^2|\psi\rangle = \langle\psi|\Delta A\Delta A|\psi\rangle = \langle\psi|(-ic\Delta B)(ic\Delta B)|\psi\rangle$.

$$\sigma_A\sigma_B = \sqrt{\langle(\Delta A)^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta B)^2\rangle} = \sqrt{c^2\,\langle(\Delta B)^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta B)^2\rangle}$$
$$\sigma_A\sigma_B = |c|\,\left\langle(\Delta B)^2\right\rangle$$

Por otra parte, para calcular el lado derecho de la desigualdad, notemos que

$$[\Delta A, \Delta B] = [A, B]$$

por lo que

$$\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| = \frac{1}{2}|\langle[\Delta A,\Delta B]\rangle| = \frac{1}{2}|\,\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle - \langle\psi|\Delta B\Delta A|\psi\rangle|$$
$$\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| = \frac{1}{2}|\,\langle\psi|(-ic\Delta B)\Delta B|\psi\rangle - \langle\psi|\Delta B ic\Delta B|\psi\rangle|$$
$$\frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle| = \frac{1}{2}|-ic(\,\langle\psi|(\Delta B)\Delta B|\psi\rangle + \langle\psi|\Delta B\Delta B)|\psi\rangle| = \frac{|c|}{2}2\left|\left\langle(\Delta B)^2\right\rangle\right| = |c|\,\left\langle(\Delta B)^2\right\rangle,$$

que es lo mismo que habíamos obtenido antes. De esta forma chequeamos que en la relación de Heisenberg se cumple la igualdad si λ es imaginario puro.

(d) Verificar la relación de incerteza para los operadores $A = S_x$ y $B = S_y$, en el estado $|S_x = +\rangle$.

Primero recordemos algunas cosas de los operadores de espín:

$$
\begin{aligned}
|S_x = +\rangle &= \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \\
S_y |+\rangle &= \frac{i\hbar}{2} |+\rangle \\
S_y |-\rangle &= \frac{-i\hbar}{2} |-\rangle \\
S_y |S_x = +\rangle &= \frac{i\hbar}{2} \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{i\hbar}{2} |S_x = -\rangle \\
S_z |S_x = +\rangle &= \frac{\hbar}{2} \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\hbar}{2} |S_x = -\rangle \\
[S_x, S_y] &= i\hbar S_z \\
S_x, S_y &= 0
\end{aligned}
$$

Ahora si, empecemos calculando la incerteza de cada uno de los operadores con el estado $|S_x = +\rangle$:

$$
\begin{aligned}
&\langle S_x = + | S_x | S_x = +\rangle = \langle S_x = + | \frac{\hbar}{2} | S_x = +\rangle = \frac{\hbar}{2} \\
&\langle S_x = + | S_y | S_x = +\rangle = \langle S_x = + | \frac{i\hbar}{2} | S_x = -\rangle = 0 \\
&\langle S_x = + | S_z | S_x = +\rangle = \langle S_x = + | \frac{\hbar}{2} | S_x = -\rangle = 0 \\
&\left\langle S_x^2 \right\rangle = \langle S_x = + | S_x S_x | S_x = +\rangle = \langle S_x = + | \frac{\hbar^2}{4} | S_x = +\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \\
&\left\langle S_y^2 \right\rangle = \langle S_x = + | S_y S_y | S_x = +\rangle = \langle S_x = - | (-i\frac{\hbar}{2})(i\frac{\hbar}{2}) | S_x = -\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \\
&\left\langle \Delta S_x^2 \right\rangle = \left\langle S_x^2 \right\rangle - \langle S_x \rangle^2 = 0 \\
&\left\langle \Delta S_y^2 \right\rangle = \left\langle S_y^2 \right\rangle - \langle S_y \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4}
\end{aligned}
$$

Como ya podríamos habernos imaginado, dado que estamos calculando la incerteza sobre un estado que es autoestado del operador, la incerteza de S_x es cero. Chequeemos que el lado derecho de la desigualdad también es cero:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4} |\langle [S_x, S_y] \rangle|^2 + \frac{1}{4} |\langle \{S_x, S_y\} \rangle - 2 \langle S_x \rangle \langle S_y \rangle|^2 \\
&\frac{1}{4} |\langle \hbar S_z \rangle|^2 + \frac{1}{4} \left| 0 - 2\frac{\hbar}{2} 0 \right|^2 = 0 + 0
\end{aligned}
$$

Con esto verificamos que efectivamente se cumple la relación de incerteza para dos operadores de espín $\frac{1}{2}$.
Les recomiendo repetir las cuentas que están hechas en el pdf y las que me saltee también, más que nada para practicar este tipo de cuentas que tienen valores medios e incertezas. Cualquier cosa que no se entienda o no quede clara, consulten! También porfis avisenme si ven algo que les parece que está mal.