23 Sean $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$ autoestados del hamiltoniano H con autovalores E_1 y E_2 respectivamente. A $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi_1\rangle = a_1 |\varphi_1\rangle + a_2 |\varphi_2\rangle$. Muestre que el valor medio de un operador B arbitrario varía armónicamente en el tiempo con frecuencia $\nu = |E_2 - E_1|/h$. Note que el período de esta oscilación satisface $|E_2 - E_1|\,\tau = h$.

El estado del sistema a tiempo $t > 0$ se obtiene aplicando el operador de evolución temporal al estado del sistema a tiempo 0

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,0)\left(a_1 |\varphi_1\rangle + a_2 |\varphi_2\rangle\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\left(a_1 |\varphi_1\rangle + a_2 |\varphi_2\rangle\right) . \tag{1}$$

Como $|\varphi_1\rangle$ y $|\varphi_2\rangle$ son autoestados del Hamiltoniano H con autovalores E_1 y E_2 respectivamente, son también autovectores de $e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$ con autovalores $e^{-\frac{i}{\hbar}tE_1}$ y $e^{-\frac{i}{\hbar}tE_2}$, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}\left(a_1 |\varphi_1\rangle + a_2 |\varphi_2\rangle\right) = a_1 e^{-\frac{i}{\hbar}tE_1} |\varphi_1\rangle + a_2 e^{-\frac{i}{\hbar}tE_2} |\varphi_2\rangle = && (2)\\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}tE_1}\left[a_1 |\varphi_1\rangle + a_2 e^{-\frac{i}{\hbar}t(E_2-E_1)} |\varphi_2\rangle\right] \equiv && (3)\\
&\equiv a_1 |\varphi_1\rangle + a_2 e^{-\frac{i}{\hbar}t(E_2-E_1)} |\varphi_2\rangle , && (4)
\end{aligned}$$

donde en la última línea usamos que dos vectores que difieren en una fase global son equivalentes como estados físicos (pertenecen al mismo rayo).

El valor medio de un operador arbitrario $\hat{B}$ en este estado dependiente del tiempo está dado por

$$\begin{aligned}
\langle\psi(t)| \hat{B} |\psi(t)\rangle &= \left[a_1^* \langle\phi_1| + a_2^* e^{\frac{i}{\hbar}t(E_2-E_1)} \langle\phi_2|\right] \hat{B} \left[a_1 |\varphi_1\rangle + a_2 e^{-\frac{i}{\hbar}t(E_2-E_1)} |\varphi_2\rangle\right] = && (5)\\
&= |a_1|^2 \langle\phi_1| \hat{B} |\phi_1\rangle + |a_2|^2 \langle\phi_2| \hat{B} |\phi_2\rangle + && (6)\\
&+ a_1 a_2^* e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} \langle\phi_2| \hat{B} |\phi_1\rangle + a_1^* a_2 e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} \langle\phi_1| \hat{B} |\phi_2\rangle . && (7)
\end{aligned}$$

La suma de los dos términos que aparecen en la ecuación (6) no depende del tiempo, es una constante que vamos llamar C. Mientras tanto, en la ecuación (7) aparece una función compleja $k(t) \equiv a_1 a_2^* e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} \langle\phi_2| \hat{B} |\phi_1\rangle$ sumada a su conjugada; esto nos da dos veces la parte real de $k(t)$. Por lo tanto, con estas definiciones se tiene

$$\langle\psi(t)| \hat{B} |\psi(t)\rangle = C + 2\mathrm{Re}[k(t)] . \tag{8}$$

La función $k(t)$ tiene la forma

$$k(t) = k_0\, e^{\frac{i}{\hbar}(E_2-E_1)t} , \tag{9}$$

donde $k_0 = a_1 a_2^* \langle\phi_2| \hat{B} |\phi_1\rangle$. En término de estas cantidades, la parte real de $k(t)$ se escribe como

$$\mathrm{Re}[k(t)] = \mathrm{Re}[k_0] \cos\left[\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\right] - \mathrm{Im}[k_0] \mathrm{sen}\left[\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\right] = \alpha \cos\left[\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar} + \theta_0\right] , \tag{10}$$

donde en la última igualdad usamos que una suma de un seno y un coseno con el mismo argumento se puede escribir como un coseno con su argumento desplazado para ciertas constantes α y θ_0. Por lo tanto,

$$\langle\psi(t)| \hat{B} |\psi(t)\rangle = C + 2\alpha \cos\left[\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar} + \theta_0\right] , \tag{11}$$

donde C, α y θ_0 son números que no dependen del tiempo. Esto nos dice que el valor de expectación del observable oscila en el tiempo con una frecuencia angular $\omega = |E_2 - E_1|/\hbar = 2\pi|E_2 - E_1|/h$, o frecuencia lineal $\nu = |E_2 - E_1|/h$, como queríamos demostrar.