36 ¿Verdadero o falso?

(a) Sobre cierto sistema cuántico se realizan mediciones sucesivas (a intervalos de tiempo ente pequeños entre ellas) de ciertos observables A, B y C en el siguiente orden $\{A,\ B,\ A,\ C,\ C,\ A\}$ obteniéndose respectivamente los valores $\{a_1,\ b_1,\ a_2,\ c_1,\ c_1,\ a_2\}$. Entonces, si inmediatamente después de la última medición se mide A se obtendrá el valor a_2.

Luego de la última medición de A, cuando se obtiene a_2, el estado del sistema colapsa a su proyección sobre el subespacio asociado al autovalor a_2, por lo que si inmediatamente después se mide A, se va a obtener nuevamente a_2 (ya que el estado del sistema sólo tiene proyección no nula sobre el subespacio asociado a dicho autovalor de A). Por lo tanto, el enunciado es **VERDADERO**.

(b) No es posible encontrar un operador T cuyo conmutador con el hamiltoniano H de un sistema sea $[T, H] = i\hbar$ si H está acotado por debajo (aclaración: esto nos dice que el operador tiempo no existe en mecánica cuántica)

Supongamos que existe un $\hat{T}$ autoadjunto que cumple con las características propuestas. Definimos el operador de "traslación en energía"

$$\hat{U}(\Delta) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta\hat{T}}\,,$$

siendo Δ una constante real. Notemos que efectivamente este es un operador que traslada la energía de un estado en un valor $-\Delta$. Si $|E\rangle$ es un autoestado de $\hat{H}$ de energía E, se tiene

$$\begin{aligned}
\hat{H}\hat{U}(\Delta)\,|E\rangle &= \left[\hat{H},\hat{U}(\Delta)\right]|E\rangle + \hat{U}\hat{H}\,|E\rangle = && (1)\\
&= -i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta\right)\hat{U}(\Delta)\,|E\rangle + E\hat{U}\,|E\rangle = && (2)\\
&= -\Delta\hat{U}(\Delta)\,|E\rangle + E\hat{U}\,|E\rangle = && (3)\\
&= (E-\Delta)\hat{U}(\Delta)\,|E\rangle\,, && (4)
\end{aligned}$$

por lo que $\hat{U}(\Delta)\,|E\rangle$ es autoestado de $\hat{H}$ con energía $E-\Delta$. Tomando entonces valores arbitrariamente positivos de Δ podemos fabricarnos autoestados de $\hat{H}$ con autovalores arbitrariamente negativos, lo que contradice el hecho de que $\hat{H}$ está acotado por debajo. Esto es un absurdo, por lo que dicho $\hat{T}$ no puede existir y entonces el enunciado es **VERDADERO**.

¿Por qué esto nos dice que no existe un operador tiempo en mecánica cuántica? Bueno, de existir dicho operador T, y teniendo en cuenta la relatividad especial que pone en pie de igualdad espacio con tiempo y momento con energía (unificadas estas cantidades en los cuadrivectores x^μ y p^μ), uno esperaría que el conmutador de T con H sea el mismo que el de x con p, es decir, $[T, H] = i\hbar$. Esta es la hipótesis que hicimos justamente en el enunciado y vimos que dicho operador no puede existir si el sistema es estable (tiene un valor mínimo de energía).

(c) Se tienen dos sistemas con hamiltonianos dados por $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ y $H' = \frac{(p+B)^2}{2m} + V(x)$. Si $\langle p\rangle$ es nulo en cada autoestado de H entonces también es nulo en cada autoestado de H'.

Este problema se puede hacer de forma similar al inciso anterior, verificando que los autoestados del Hamiltoniano con $B \neq 0$ son traslaciones en momento de los autoestados del Hamiltoniano con $B = 0$. Para no utilizar un razonamiento similar al que ya hicimos damos una alternativa que consiste en utilizar la representación de impulsos. En dicha representación, recordando que el operador p actúa multiplicando mientras que el operador x actúa como $i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$, las ecuaciones de Schrödinger estacionarias para los autoestados $\tilde{\psi}$ y $\tilde{\psi}_B$ de H y H', respectivamente, se escriben como

$$H\tilde{\psi}(p) = E_p\tilde{\psi}(p) \Longrightarrow \left[\frac{p^2}{2m} + V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\tilde{\psi}(p) = E_p\tilde{\psi}(p)\,,$$

$$H'\tilde{\psi}_B(p) = E'_p\tilde{\psi}_B(p) \Longrightarrow \left[\frac{(p+B)^2}{2m} + V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\tilde{\psi}_B(p) = E'_p\tilde{\psi}_B(p)\,.$$

Haciendo el cambio de variables $p \to p - B$, la segunda ecuación queda

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\tilde{\psi}_B(p-B) = E'_{p-B}\tilde{\psi}_B(p-B)\,.$$

Esta última ecuación es la ecuación de autovalores y autovectores para el operador $H = \frac{p^2}{2m} + V\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)$. Ya habíamos escrito más arriba esta misma ecuación. Comparándolas, obtenemos que el espectro de H (el conjunto de todos los valores de energía) es el mismo que el de H' y además

$$\tilde{\psi}_B(p-B) = \tilde{\psi}(p)\,,$$

lo que nos relaciona las autofunciones de H con las de H'. Ojo que para que esta última igualdad sea cierta usamos que en una dimensión no hay degeneración en los autoestados del Hamiltoniano, algo que vimos en la práctica 0 (de manera que si fijamos un valor de energía hay sólo un autoestado asociado a dicho valor y podemos concluir entonces que $\tilde{\psi}_B(p-B) = \tilde{\psi}(p)$). Con esta información podemos ver que el enunciado es **FALSO**:

$$\langle p\rangle_{\tilde{\psi}_B} = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p\, |\tilde{\psi}_B(p)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, p\, |\tilde{\psi}(p+B)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp'\,(p'-B)\,|\tilde{\psi}(p')|^2 = \underbrace{\langle p\rangle_{\tilde{\psi}}}_{=0} - B = -B\,.$$