$\boxed{45}$ **Electrón en un campo magnético. Niveles de Landau.** El Hamiltoniano de un electrón en presencia de un campo magnético externo estático con potencial vector $\mathbf{A}(x,y,z)$ está dado por

$$H = \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(x,y,z)\right]^2.$$

Definimos los operadores $\Pi_i$, $i = x, y, z$ como

$$\Pi_i = p_i - \frac{eA_i}{c}.$$

a) Usando estos nuevos operadores podemos escribir al hamiltoniano como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left(p_x - \frac{e}{c}A_x\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{e}{c}A_y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_z - \frac{e}{c}A_z\right)^2 \\ &= \frac{1}{2m}\Pi_x^2 + \frac{1}{2m}\Pi_y^2 + \frac{1}{2m}\Pi_z^2. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Luego usando la relación canónica de conmutación $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ podemos calcular el conmutador

$$[x_i, \Pi_j] = \left[x_i, p_j - \frac{e}{c}A_j\right] = [x_i, p_j] = i\hbar \tag{2}$$

que es el mismo que el conmutador entre la posición y el momento.
c) Por otro lado podemos calcular el conmutador entre las nuevas variables como

$$\begin{aligned} [\Pi_i, \Pi_j] &= \left[p_i - \frac{e}{c}A_i, p_j - \frac{e}{c}A_j\right] \\ &= \cancel{[p_i, p_j]} - \frac{e}{c}[p_i, A_j] - \frac{e}{c}[A_i, p_j] + \frac{e^2}{c^2}\cancel{[A_i, A_j]} \\ &= -\frac{e}{c}[p_i, A_j] - \frac{e}{c}[A_i, p_j] \\ &= -\frac{e}{c}\left(p_iA_j - A_jp_i + A_ip_j - p_jA_i\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Recordemos que el potencial vector $A_i(\mathbf{x})$ es una función de la posición por lo cual no conmuta con el momento. Podemos calcular el conmutador en representación de posición como

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y]\,\psi(\mathbf{x}) &= \frac{e}{c}i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - A_y\frac{\partial}{\partial x} + A_x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\psi(\mathbf{x}) \\ &= \frac{e}{c}i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A_y\psi(\mathbf{x})\right) - A_y\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{x}) + A_x\frac{\partial}{\partial y}\psi(\mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial y}\left(A_x\psi(\mathbf{x})\right)\right] \\ &= \frac{e}{c}i\hbar\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y\right) - \left(\frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\right]\psi(\mathbf{x}) \\ &= \frac{e}{c}i\hbar\left[\nabla\times\mathbf{A}\right]_z\psi(\mathbf{x}) = -\frac{e}{c}B_z\psi(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{4}$$

Más en general tenemos la relación de conmutación

$$[\Pi_i, \Pi_j] = \frac{e}{c}i\hbar\epsilon_{ijk}B_k. \tag{5}$$

De aquí concluimos que el efecto del campo magnético es el surgimiento de una nueva relación de conmutación que generará una cuantización de los niveles de energía como en el oscilador armónico.

Considere el caso en que el campo magnético es uniforme en la dirección $\hat{e}_z$, es decir $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$. En tal caso, en un gauge apropiado se puede tomar como potencial vector $\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y)\hat{e}_x + A_y(x, y)\hat{e}_y$ con $A_x = -By/2$, $A_y = Bx/2$. En este gauge tenemos que $\Pi_z = p_z$.

d) Calculando el conmutador

$$\begin{aligned}[p_z, H] &= \frac{1}{2m}\left[p_z, \Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2\right] \\ &= \frac{1}{2m}\left[p_z, (p_x + \frac{eB}{2c}y)^2 + (p_y - \frac{eB}{2c}x)^2 + p_z^2\right] = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

vemos que $p_z$ conmuta con el hamitoniano. Ya hemos visto que los autovalores de $p_z$ son todos los reales y los podemos escribir como $\hbar k$ con $k \in \mathbb{R}$.

e) En este caso, usando el resultado anterior, tenemos

$$[\Pi_x, \Pi_y] = \frac{e}{c} i\hbar B. \tag{7}$$

Redefiniendo

$$V_x = \sqrt{\frac{c}{eB}}\Pi_x,\ V_y = \sqrt{\frac{c}{eB}}\Pi_y, \tag{8}$$

tenemos la relación de conmutación canónica

$$[V_x, V_y] = i\hbar. \tag{9}$$

Mientras que el hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2m}p_z^2 + \frac{|eB|}{mc}\frac{1}{2}\left(V_x^2 + V_y^2\right) \tag{10}$$

Así vemos que el hamiltoniano tiene dos partes. Por un lado $V_x$ y $V_y$ son las variables canónicas de un oscilador armónico cuántico con frecuencia $|eB|/(mc)$ y autovalores $|eB|/(mc)(n+1/2)$ con $n \in \mathbb{N}$. Estos nuevos niveles cuantizados que surgen del efecto del campo magnético se conocen como **niveles de Landau**. Por otro lado tenemos el hamiltoniano de una partícula libre en la dirección $z$ con autovalores $\hbar^2 k^2/(2m)$ con $k \in \mathbb{R}$. De esta manera concluimos que los autovalores del hamiltoniano completo son

$$E_{kn} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar\frac{|eB|}{mc}(n + 1/2). \tag{11}$$