46 ¿Verdadero o falso?

(a) Se tiene una partícula de masa m sometida al potencial del oscilador armónico unidimensional con frecuencia de oscilación ω. A tiempo $t = 0$, el sistema se encuentra en un estado para el cual una medición de la energía puede resultar solamente en los valores $\hbar\omega/2$ y $3\hbar\omega/2$ con la misma probabilidad, y en el que el valor medio del momento es igual a $(m\omega\hbar/2)^{1/2}$. Esta información determina completamente el estado del sistema a $t = 0$.

Si sólo se pueden obtener los valores de energía $\hbar\omega/2$ y $3\hbar\omega/2$, el estado del sistema es una combinación lineal de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Como además sabemos que la probabilidad de hallar esos dos valores de energía es la misma, recordando además que el estado debe estar normalizado, podemos afirmar que tendrá la forma

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\alpha}|1\rangle\right) ,$$

para cierto α real (utilizamos el hecho de que dos vectores que difieren en una fase global representan el mismo estado físico). Para este estado, el valor medio del momento está dado por

$$\langle p\rangle = \langle\phi|i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a - a^\dagger\right)|\phi\rangle = ... = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\mathrm{sen}(\alpha)\,.$$

Por otro lado, el enunciado nos dice que $\langle p\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}$. Entonces, debe ser $\mathrm{sen}(\alpha) = 1$, lo que nos da $\alpha = \pi/2 + 2\pi n$ (con n entero). Esto determina completamente el estado, ya que $e^{i(\pi/2+2\pi n)} = i$, con lo que resulta

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right) .$$

Por lo tanto, el enunciado es **VERDADERO**.

(b) En la representación de Heisenberg, el operador de número del oscilador armónico unidimensional es independiente del tiempo.

La ecuación de movimiento para N_H (operador de número en la representación de Heisenberg) es

$$\frac{dN_H}{dt} = [N_H, H_H] = [N_H, \hbar\omega(N_H + 1/2)] = 0\,,$$

de donde sale que N_H no depende del tiempo. Por lo tanto, el enunciado es **VERDADERO**.

(c) Se tiene un oscilador armónico isotrópico de frecuencia ω en d dimensiones. Entonces, el nivel asociado a la energía $\hbar\omega\left(N + \frac{d}{2}\right)$ (siendo N un entero no negativo) tiene degeneración $\frac{(N+d-1)!}{N!\,(d-1)!}$.

Los niveles de energía de un oscilador isotrópico d-dimensional están dados por

$$E_{n_1,n_2,...,n_d} = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + ... + n_d + d/2\right) .$$

$N \equiv n_1 + n_2 + ... + n_d$ es un número natural o cero, porque cada n_i es natural o cero. Para hallar la degeneración del nivel con energía $\hbar\omega\,(N + d/2)$ tenemos que encontrar entonces el número de autoestados de H $|n_1, n_2, ..., n_d\rangle$ que tienen energía $\hbar\omega\,(N + 3/2)$; es decir, tenemos que ver de cuántas formas es posible escribir un número N natural o cero como

Figura 1: Contar la cantidad de formas en las que se pueden repartir 10 bolitas en tres cajas es equivalente a contar la cantidad de ordenamientos diferentes que se pueden hacer del conjunto formado por 10 bolitas y 2 paredes (rectángulos rojos) que separen a las bolitas en 3 grupos (cajas). Dicha cantidad de ordenamientos se calcula tomando las permutaciones del total de objetos, $(10+2)!$, y dividiendo por las permutaciones de objetos que son iguales entre sí, en este caso 10! y 2!, lo que da $(10+2)!/(10!\,,2!)$.

la suma $n_1 + n_2 + ... + n_d$ de d números naturales o cero. Esto es equivalente a resolver el problema de encontrar todas las formas en las que se pueden repartir N bolitas en d cajas, lo que se puede pensar como todos los ordenamientos posibles que se pueden hacer del conjunto formaddo por N objetos y $(d-1)$ paredes ($(d-1)$ paredes me permiten separar las N bolitas en tres grupos, que es lo que buscamos - ver figura 1, en la cual se ejemplifica esto con $N = 10$ y $d = 3$). El número de ordenamientos posibles de $N + (d-1)$ objetos, de los cuales N son iguales entre sí y $d-1$ son iguales entre sí es

$$\frac{(N+d-1)!}{N!(d-1)!}\,.$$

Como dijimos, esta es entonces la degeneración del nivel $\hbar\omega\,(N + d/2)$, por lo que el enunciado es **VERDADERO**.