$\boxed{54}$ En este ejercicio nos piden para comenzar que escribamos en forma matricial a los operadores J^2, J_z, J_x, J_y en la base $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ de autoestados de J^2 y J_z utilizando que sabemos cómo operan J_+ y J_-.

Comencemos repasando cómo funcionan los operadores de subida y bajada. Tenemos las siguientes relaciones para dichos operadores actuando sobre el estado $|j,m\rangle$

$$J_\pm |j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\,|j,m\pm 1\rangle\,. \tag{1}$$

Sabemos también cómo funciona el operador J_z sobre el estado $|j,m\rangle$:

$$J_z |j,m\rangle = \hbar m\, |j,m\rangle \tag{2}$$

Vemos ahora cómo podemos ver de qué forma actúan los demás operadores sobre el estado j,m en término de los operadores que ya conocemos.

Los operadores J_+ y $J+-$ se definen como

$$J_\pm = \frac{1}{2}(J_x \pm i\, J_y)$$

Entonces fácilmente podemos reescribir

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)\ ,\ J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \tag{3}$$

. Tenemos por otro lado que el operador J^2 se define como $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$, y reemplazando con la ecuación (3) obtenemos:

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+). \tag{4}$$

Ya pudimos escribir todos los operadores en término de J_z, J_+, J_- y sabemos cómo actúan estos operadores sobre el estado $|j,m\rangle$.

Empecemos entonces a escribir los operadores en su forma matricial. Para esto debemos saber cómo actúa cada uno sobre los elementos de la base.

(a) J_z : $J_z|1,1\rangle = \hbar|1,1\rangle$, $J_z|1,0\rangle = 0$, $J_z|1,-1\rangle = -\hbar|1,-1\rangle$. Como era de esperarse, J_z es diagonal en su base de autoestados. Matricialmente tenemos

$$J_z = \hbar\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{5}$$

(b) J_+ : $J_+|1,1\rangle = 0$, $J_+|1,0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-0(0+1)}\,|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,1\rangle$,
$J_+|1,-1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)+1(-1+1)}\,|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle$. En forma matricial esto se ve como:

$$J_+ = \hbar\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{6}$$

(c) J_- : $J_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\,|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle$,
$J_-|1,0\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1)-0(0-1)}\,|1,-1\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1,-1\rangle$, $J_+|1,-1\rangle = 0$. En forma matricial esto se ve como:

$$J_- = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix} \tag{7}$$

Ahora que conocemos la forma matricial de J_z, J_+, J_- podemos encontrarla para los operadores que faltan:

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$J_y = \frac{1}{2\,i}(J_+ - J_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\,i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 = 2\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Ya obtuvimos entonces la representación matricial de todos los operadores en esta base. Nos piden ahora que verifiquemos realizando la multiplicación de matrices la siguiente relación de conmutación:

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

Escribiendo el conmutador utilizando las matrices tenemos:

$$[J_x, J_y] = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\sqrt{2}i} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$[J_x, J_y] = \frac{\hbar^2}{2\,i} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$[J_x, J_y] = \frac{\hbar^2}{2\,i} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = i\,\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = i\,\hbar\,J_z \tag{11}$$

Donde en la penúltima igualdad usamos que $\frac{1}{i} = -i$.
Luego, el ejercicio tiene tres incisos en los que nos hace trabajar con estas matrices.
El item a) nos pide encontrar los autoestados de J_y y escribirlos como combinación lineal de la base con la que venimos trabajando. Para esto vamos a buscar los autovalores y autovectores de la matriz J_y. Comenzamos calculando los autovalores de la matriz J_y:

$$det(J_y - \lambda) = -\lambda\,[\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{2}] + i\,\frac{\hbar^2}{2}\lambda = 0$$

De esta ecuación obtenemos los tres autovalores $\lambda_+ = \hbar$, $\lambda_- = -\hbar$ y $\lambda_0 = 0$. Como esperábamos, los autovalores se corresponden a los posibles valores que puede tomar el momento angular de una partícula con $j = 1$. Los autovalores correspondientes a cada uno de los autovalores son los siguientes:

$$|1, 1_y\rangle = \frac{1}{2}\Big(|1, 1\rangle + i\sqrt{2}\,|1, 0\rangle - |1, -1\rangle\Big)$$

$$|1,0_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + |1,-1\rangle\right)$$

$$|1,-1_y\rangle = \frac{1}{2}\Big(|1,1\rangle - i\sqrt{2}\,|1,0\rangle - |1,-1\rangle\Big)$$

Recuerden normalizar los autovectores después de calcularlos.

El inciso b) nos dice que tenemos el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle)$, y nos preguntan qué valores de J_x se pueden medir y con qué probabilidad. Quizás la forma más sencilla de ver esto sea primero calcular los autoestados de J_x, ya que sabemos calcular las probabilidades de los resultados de las mediciones proyectando al estado del sistema en los distintos subespacios del operador. De la misma forma que obtuvimos los autovalores de J_y podemos hacerlo para J_x y se obtiene:

$$|1,1_x\rangle = \frac{1}{2}\Big(|1,1\rangle + \sqrt{2}\,|1,0\rangle + |1,-1\rangle\Big)$$

$$|1,0_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle - |1,-1\rangle\right)$$

$$|1,-1_x\rangle = \frac{1}{2}\Big(|1,1\rangle - \sqrt{2}\,|1,0\rangle + |1,-1\rangle\Big)$$

Nos damos cuenta entonces que $|\psi\rangle = |1,0_x\rangle$, por lo tanto, al medir J_x el único valor que podemos medir será $m_x = 0$, con probabilidad 1.

Luego, nos piden que repitamos el inciso pero ahora para el observable J_y. Queremos entonces escribir al estado $|\psi\rangle$ en la base de autoestados de J_y. Mirando los autoestados de J_y con fuerza nos podemos dar cuenta que:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1_y\rangle + |1,-1_y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle) = |\psi\rangle$$

Teniendo $|\psi\rangle$ en la base de autoestados de J_y podemos proceder a calcular las probabilidades de que ocurra cada resultado:

$$P(J_y = +\hbar) = \langle\psi|1,1_y\rangle\,\langle 1,1_y|\psi\rangle = \frac{1}{2} \tag{12}$$

$$P(J_y = -\hbar) = \langle\psi|1,-1_y\rangle\,\langle 1,-1_y|\psi\rangle = \frac{1}{2} \tag{13}$$

$$P(J_y = 0) = \langle\psi|1,0_y\rangle\,\langle 1,0_y|\psi\rangle = 0 \tag{14}$$

Por lo tanto, nunca podemos obtener el valor 0, mientras que obtenemos $\hbar$ y $-\hbar$ con probabilidad 1/2.

Por último, en el inciso c) nos dicen que nuevamente tenemos el estado $|psi\rangle$. Se mide J_z sobre este estado y se obtiene el valor $\hbar$, nos preguntan ahora qué valores se pueden obtener si a continuación se mide J_y.

Como la medición arrojó el resultado $\hbar$, sabemos que, por el postulado de medición, el nuevo estado del sistema luego de la medición de J_z es $\left|\tilde{\psi}\right\rangle = |1,1\rangle$. Lo que tenemos que hacer entonces es repetir lo que hicimos en el ítem b) pero con el estado $\left|\tilde{\psi}\right\rangle$.

Reescribimos $\left|\tilde{\psi}\right\rangle$ en la base de autoestados de J_y:

$$\left|\tilde{\psi}\right\rangle = |1,1\rangle = \frac{1}{2}(|1,1_y\rangle + \sqrt{2}\,|1,0_y\rangle + |1,-1_y\rangle)$$

Calculamos nuevamente las probabilidades utilizando los proyectores:

$$P(J_y = +\hbar) = \left\langle \tilde{\psi} \middle| 1, 1_y \right\rangle \left\langle 1, 1_y \middle| \tilde{\psi} \right\rangle = \frac{1}{4} \tag{15}$$

$$P(J_y = -\hbar) = \left\langle \tilde{\psi} \middle| 1, -1_y \right\rangle \left\langle 1, -1_y \middle| \tilde{\psi} \right\rangle = \frac{1}{4} \tag{16}$$

$$P(J_y = 0) = \left\langle \tilde{\psi} \middle| 1, 0_y \right\rangle \left\langle 1, 0_y \middle| \tilde{\psi} \right\rangle = \frac{1}{2} \tag{17}$$

Es interesante notar que cuando no realizábamos la medición de J_Z era imposible obtener el resultado $m_y = 0$, mientras que al realizar la medición de J_Z antes que la de J_y se vuelve posible obtener el resultado $m_y = 0$ en la medición. Esto se debe a que los observables no conmutan, como ya vimos en ejemplos anteriores, pero no deja de ser algo sorprendente.