59 **Una forma de ver que el momento angular orbital no puede ser semientero.**
En clase habíamos resuelto el problema 55 de la guía y demostramos, de una forma muy elegante, que los j, m del momento angular orbital (cuando escribimos al momento angular como $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$) son necesariamente enteros. Este ejercicio propone, con un argumento sencillo, mostrar que aparecen problemas si uno intenta incluir valores semienteros.

Según la teoría de momento angular, para $j = \frac{1}{2}$ uno tenía en particular

$$L_+ |1/2; 1/2\rangle = 0\,, \tag{1}$$
$$L_- |1/2; -1/2\rangle = 0\,, \tag{2}$$
$$L_- |1/2; 1/2\rangle \propto |1/2; -1/2\rangle\,. \tag{3}$$

Esto vale en general y lo habíamos derivado usando nada más que las relaciones de conmutación que satisfacen los operadores de momento angular. Pero asumamos ahora que además el momento angular es orbital y por lo tanto $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Veamos los problemas que trae esta suposición.

Para ello recordemos primero la representación en la base posición de los operadores L_+, L_-

$$\langle \mathbf{x}|L_+|\psi\rangle = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi(\mathbf{x}) \tag{4}$$
$$\langle \mathbf{x}|L_-|\psi\rangle = \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\psi(\mathbf{x}) \tag{5}$$

El ejercicio nos propone construir $\langle \mathbf{x}|1/2; -1/2\rangle$ de dos formas distintas que **no** llevan al mismo resultado, en contradicción con (1)-(3).

En primer lugar podemos encontrar $Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \equiv \langle \mathbf{x}|1/2; 1/2\rangle$ planteando

$$\langle \mathbf{x}|L_+|1/2; 1/2\rangle = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) = 0\,. \tag{6}$$

La ecuación diferencial se resuelve por separación de variables, de la misma forma que vimos en la clase de armónicos esféricos (clase 14). Con las mismas ideas que vimos en aquella clase, intenten resolver la ecuación por su cuenta y deberían llegar a que la solución más general es

$$Y_{m,m}(\theta,\varphi) = N e^{im\varphi}\mathrm{sen}^m(\theta)\,, \tag{7}$$

donde N es la constante de normalización. Luego fijamos m pidiendo que la función tenga los autovalores correspondientes; como $L_z Y_{m,m} = m\hbar Y_{m,m}$, en este caso nos interesa la solución con $m = 1/2$ y así llegamos a la misma solución que nos daba la guía

$$Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \propto e^{i\varphi/2}\mathrm{sen}^{1/2}(\theta)\,. \tag{8}$$

Ahora si seguimos el inciso (a) y usamos (3),

$$Y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \propto L_- Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)\,, \tag{9}$$
$$Y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \propto e^{-i\varphi/2}\mathrm{sen}^{1/2}(\theta)\cot(\theta)\,. \tag{10}$$

Por otro lado siguiendo el inciso (b), usamos (2) y resolvemos la ecuación diferencial (pueden hacerlo por su cuenta) de forma análoga a como hicimos con $L_+Y_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 0$

$$L_-Y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) = 0\,, \tag{11}$$

$$Y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi) \propto e^{-i\varphi/2}\text{sen}^{1/2}(\theta)\,. \tag{12}$$

Lo que vemos es que llegamos a dos resultados (10) y (12) distintos para el mismo estado $Y_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\theta,\varphi)$, violando las relaciones (1)-(3) que habíamos deducido en la primera clase de momento angular. El origen de este problema fue haber escrito $\mathbf{L} = \mathbf{x}\times\mathbf{p}$ y luego asumir que este operador puede tener autoestados con j, m semienteros al igual que habíamos deducido para el momento angular en general. Podemos comentar aparte que estas funciones de onda no son periódicas en φ; son discontinuas en $\varphi = 0$ y en particular no derivables.

La conclusión del ejercicio es que los estados de momento angular con j, m semientero no son autoestados de momento angular orbital $\mathbf{L} = \mathbf{x}\times\mathbf{p}$. Lo que hicimos no es una demostración, pero sí vimos que rápidamente aparecen problemas si uno quisiera asociar momento angular semientero al momento angular orbital.