69 **1/2+1/2+1/2+1/2.** Cierto sistema cuántico de cuatro partículas de spin 1/2, tiene un hamiltoniano dado por

$$H = -\gamma \left(S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_3 + S_3 \cdot S_4 + S_4 \cdot S_1 \right), \tag{1}$$

donde γ es una constante positiva y S_i es el operador de spin de la partícula i-ésima ($i = 1, 2, 3, 4$).
a) ¿Cuál es la dimensión del espacio de Hilbert del sistema? Hallar los niveles de energía y su correspondiente degeneración (no es necesario escribir explícitamente los estados).

Para empezar sabemos que el sistema consiste de 4 partículas de spin 1/2 y como cada una tiene dos estados posibles tenemos que la dimensión del espacio de Hilbert es $2^4 = 16$.

El siguiente objetivo es calcular los niveles de energía, es decir, los autovalores del hamiltoniano. Para eso queremos escribir al hamiltoniano en términos de operadores que conmuten y que conozcamos sus autovalores. Pensando en que estamos tratando con un problema de suma de momento angular podemos notar que el producto de operadores del hamiltoniano se puede obtener del cuadrado del operador suma de momentos angulares y restando términos extra que nos aparecen

$$H = -\gamma \left[\frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2 - \frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{2}S_4^2 - S_1 S_3 - S_2 S_4 \right]. \tag{2}$$

Podemos repetir el procedimiento anterior con los 2 términos extra que tuvimos que agregar para obtener

$$H = -\gamma [\frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2 - \frac{1}{2}S_1^2 - \frac{1}{2}S_2^2 - \frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{2}S_4^2 \tag{3}$$

$$- \frac{1}{2}(S_1 + S_3)^2 + \frac{1}{2}S_1^2 + \frac{1}{2}S_3^2 - \frac{1}{2}(S_2 + S_4)^2 + \frac{1}{2}S_2^2 + \frac{1}{2}S_4^2] \tag{4}$$

$$= -\gamma \left[\frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2 - \frac{1}{2}(S_1 + S_3)^2 - \frac{1}{2}(S_2 + S_4)^2 \right]. \tag{5}$$

La ventaja de escribir al hamiltoniano de esta forma es que si definimos los operadores suma de momentos angulares

$$S_{13} := S_1 + S_3 \tag{6}$$

$$S_{24} := S_2 + S_4 \tag{7}$$

$$S_{1234} := S_{13} + S_{24}, \tag{8}$$

podemos reescribirlo como

$$H = -\frac{\gamma}{2} \left[(S_{1234})^2 - S_{13}^2 - S_{24}^2 \right]. \tag{9}$$

Y sabemos cómo obtener los autovalores de los operadores de suma momento angular. Al hacer la suma de momento angular entre 1 y 3 tenemos que

$$S_{13}^2 |s_1, s_3; s_{13}, m_{13}\rangle = s_{13}(s_{13} + 1)\hbar^2 |s_1, s_3; s_{13}, m_{13}\rangle \tag{10}$$

con

$$0 = |1/2 - 1/2| = |s_1 - s_3| \leq s_{13} \leq s_1 + s_3 = 1/2 + 1/2 = 1 \tag{11}$$

$$\implies s_{13} = 0, 1.$$

Al hacer la suma de momento angular entre 2 y 4 tenemos que

$$S_{24}^2 |s_2, s_4; s_{24}, m_{24}\rangle = s_{24}(s_{24} + 1)\hbar^2 |s_2, s_4; s_{24}, m_{24}\rangle \tag{12}$$

con

$$0 = |s_2 - s_4| \leq s_{24} \leq s_2 + s_4 = 1 \tag{13}$$
$$\implies s_{24} = 0, 1.$$

Al hacer la suma entre S_{13} y S_{24} tenemos

$$S^2_{1234}|s_{13}, s_{24}; s_{1234}, m_{1234}\rangle = s_{1234}(s_{1234}+1)\hbar^2|s_{13}, s_{24}; s_{1234}, m_{1234}\rangle \tag{14}$$

con

$$|s_{13} - s_{24}| \leq s_{1234} \leq s_{13} + s_{24}. \tag{15}$$

Entonces estos estados diagonalizan el hamiltoniano

$$H|s_{13}, s_{24}; s_{1234}, m_{1234}\rangle = E(s_{13}, s_{24}, s_{1234})|s_{13}, s_{24}; s_{1234}, m_{1234}\rangle, \tag{16}$$

siendo los niveles de energía

$$E(s_{13}, s_{24}, s_{1234}) = -\frac{\gamma}{2}\hbar^2\left[s_{1234}(s_{1234}+1) - s_{13}(s_{13}+1) - s_{24}(s_{24}+1)\right]. \tag{17}$$

Para determinar cuales son los valores posibles basta con considerar todas las combinaciones posibles para s_{13}, s_{24} y s_{1234}. Además una vez que elegimos un valor para s_{1234} como el nivel de energía no depende de la proyección de spin m_{1234}, el mismo estará degenerado en $2s_{1234}+1$ estados que corresponde al número de valores posibles para m_{1234}. Consideremos entonces todos los casos posibles.
Si $s_{13} = 0$, $s_{24} = 0$ entonces $s_{1234} = 0$ y $E(0,0,0) = 0$ con degeneración$= 2*0+1 = 1$.
Si $s_{13} = 0$, $s_{24} = 1$ entonces $s_{1234} = 1$ y $E(0,1,0) = 0$ con degeneración$= 2*1+1 = 3$.
Si $s_{13} = 1$, $s_{24} = 0$ entonces $s_{1234} = 1$ y $E(1,0,0) = 0$ con degeneración$= 2*1+1 = 3$.
Si $s_{13} = 1$, $s_{24} = 1$ entonces $s_{1234} = 0,1,2$: Hay 3 posibilidades i) si $s_{1234} = 0$ y $E(1,1,0) = 2\gamma\hbar^2$ con degeneración$= 2*0+1 = 1$, ii) si $s_{1234} = 1$ y $E(1,1,1) = \gamma\hbar^2$ con degeneración$= 2*1+1 = 3$, iii) si $s_{1234} = 2$ y $E(1,1,2) = -\gamma\hbar^2$ con degeneración$= 2*2+1 = 5$.
Juntando todo tenemos: $E = -\gamma\hbar^2$ con degeneración$= 5$, $E = 0$ degeneración$= 1+3+3 = 7$, $E = \gamma\hbar^2$ con degeneración$= 3$ y $E = 2\gamma\hbar^2$ con degeneración$= 1$. Puede chequear que agotamos todas las posibilidades notando que contando las degeneraciones tenemos $5+7+3+1 = 16$ niveles de energía que, como debe ser, coincide con la dimensión del espacio de Hilbert.

b) Se realizan sobre el sistema mediciones de $\mathbf{S}^2$ y S_z (siendo $\mathbf{S}$ el operador de spin total del sistema) y se obtienen los valores $2\hbar^2$y $\hbar$ respectivamente. ¿Es esta información suficiente para determinar el estado del sistema luego de estas mediciones?
El operador de spin total $\mathbf{S}^2$ del enunciado es el mismo que antes llamamos S^2_{1234} y sus autovalores son $s_{1234}(s_{1234}+1)\hbar^2$. Sabiendo que el resultado de la medición fue $2\hbar^2 = 1*(1+1)\hbar$ deducimos que $s_{1234} = 1$ mientras que el enunciado nos dice que el autovalor de S_z observado fue $1\hbar = m_{1234}\hbar$ con lo cual $m_{1234} = 1$. Sin embargo para determinar el estado $|s_{13}, s_{24}; s_{1234}, m_{1234}\rangle$ por completo debemos determinar aún s_{13} y s_{24} lo cual es imposible ya que como vimos si $s_{1234} = 1$ puede ser que: i) $s_{13} = 0$ y $s_{24} = 1$, ii) $s_{13} = 1$ y $s_{24} = 0$ o iii) $s_{13} = 1$ y $s_{24} = 1$. Concluimos entonces que la información provista por las mediciones no es suficiente para determinar el estado del sistema.